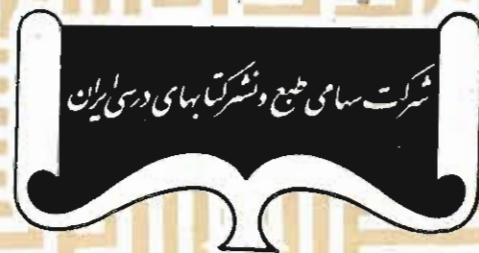


توانا بود هر که دانا بود

هندسه
رقومی و ترسیمی

برای سال ششم ریاضی



بها در تمام کشور ۲۱ ریال

توانا بود هر که دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

هندسه رقومی و تریسمی

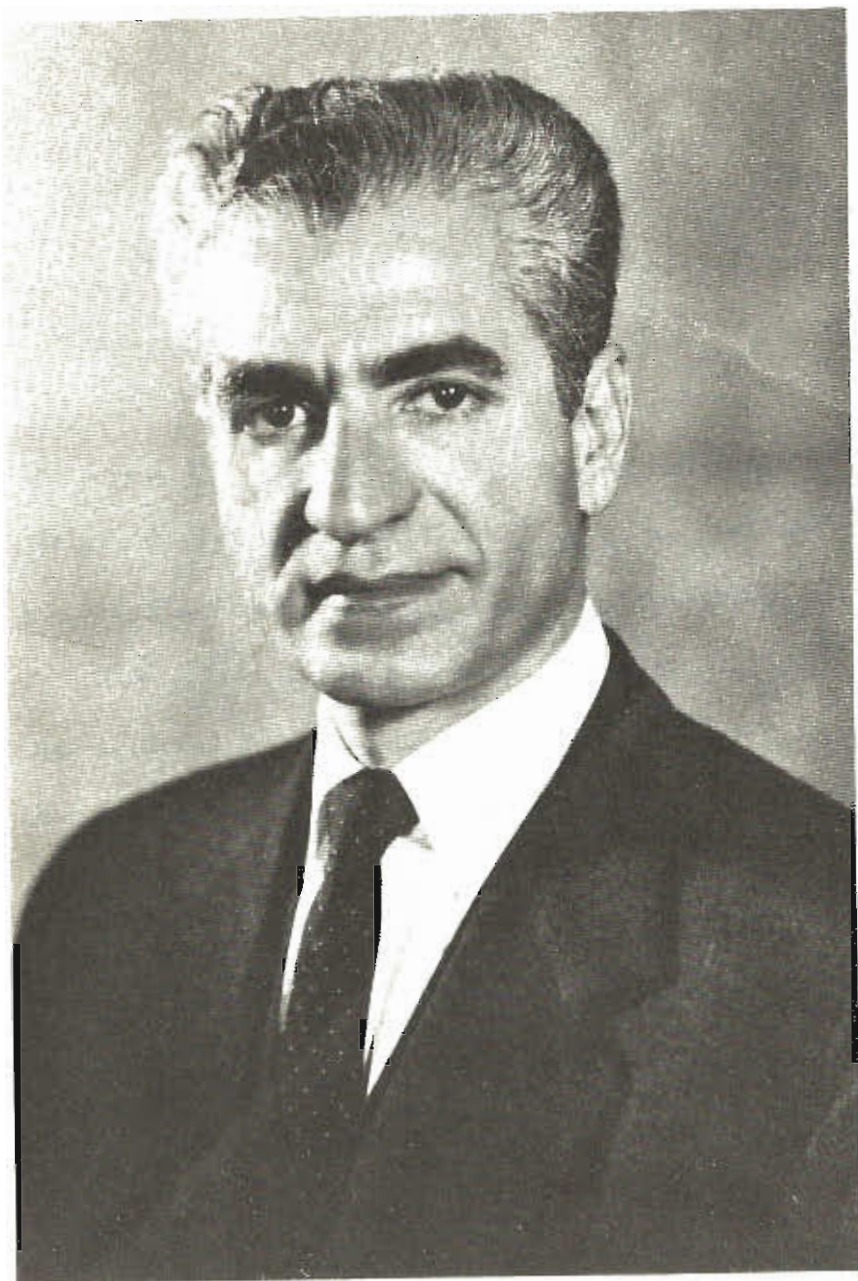
برای سال ششم ریاضی

حق چاپ محفوظ

چاپ و توزیع از :



۱۳۴۵



این کتاب که به وسیله آقایان موسی آذر نوش ، احمد
 بیرشاک ، جهانگیر شمس آوری ، عبدالغنی علیم مروستی ،
 پروفیسور تقی قاطمی ، دکتر جمال عصار ، باقر نحوی ، شادروان
 محسن هنر بخش نگارش یافته ، بر طبق ماده ۴ تصویب نامه شماره ۹۱۸
 هیئت دولت مورخ ۴۱۹۲۱۸ و ماده ۱۸ تصویب نامه قانونی
 ۴۴۸۴ مصوب ۴۲۳۱۸ از طرف کمیسیونهای منتخب شورای عالی
 فرهنگ برای تدریس در دبیرستانها برگزیده شد و به موجب
 رای شماره ۱۵۶۱ شورای عالی فرهنگ مورخ ۴۲۸۲۴
 از نظر مطالب در سازمان کتابهای درسی ایران بررسی شد و
 در چاپخانه فردوسی بچاپ رسید .

کتاب یکی از ارکان اصلی آموزش و پرورش در
اجتماع کنونی بشری است. هر دانش‌پژوه که خواهان
حل مشکل یا درك حقیقتی باشد، از مصاحبت کتاب و
توسل بدین وسیله مطمئن و مشاور مؤتمن ناگزیر است.
دانش‌آموزان با استعانت از کتاب می‌توانند به جهان
بیکران علم دسترسی یابند و سرمایه لازم برای رفاه حال
خویش و تعالی جامعه خود کسب کنند.

وزارت آموزش و پرورش مساعی خویش را بکار
می‌برد تا برای استفاده دانش‌آموزان کتابهایی عرضه
کند که با پیشرفتهای علمی و فنی جهان مترقی امروز
هماهنگ و بر اساس جدیدترین اصول آموزش و پرورش
تنظیم شده باشد.

نباید از نظر دور داشت که با وسعت دامنه علوم در جهان امروز، هر اندازه کتب درسی جامع و کامل تهیه شده باشد کافی برای تجهیز علمی جوانان نیست و دانش آموزان گرامی نباید مطالعات خود را به این کتب محدود سازند، بلکه باید با راهنمایی معلمان خویش در ساعات فراغت به مطالعه کتاب در کنار دروس خود بپردازند و اوقات عزیز خویش را برایگان از کف ندهند.

بر محققان و مؤلفان کشور فرض است که در راه تهیه اینگونه کتابها بکوشند. بخصوص در این عصر مترقی که به اراده شاهنشاه آریامهر و در سایه انقلاب ششم بهمن ماه ۱۳۴۱ و با اجرای طرح سپاه دانش، اهالی نقاط دورافتاده مملکت نیز از نعمت سواد برخوردار گردیده و هر روز بر عده افراد کتابخوان کشور افزوده می شود فرصت را غنیمت شمرند و به تألیف کتابهایی مفید در رشته های مختلف علوم و فنون با توجه به احتیاجات علمی دانش آموزان بپردازند و از این راه به پیشرفت فرهنگ و علوم و رشد اقتصادی کشور خدمتی ارزنده بنمایند.

وزیر آموزش و پرورش - دکتر هادی هدایتی

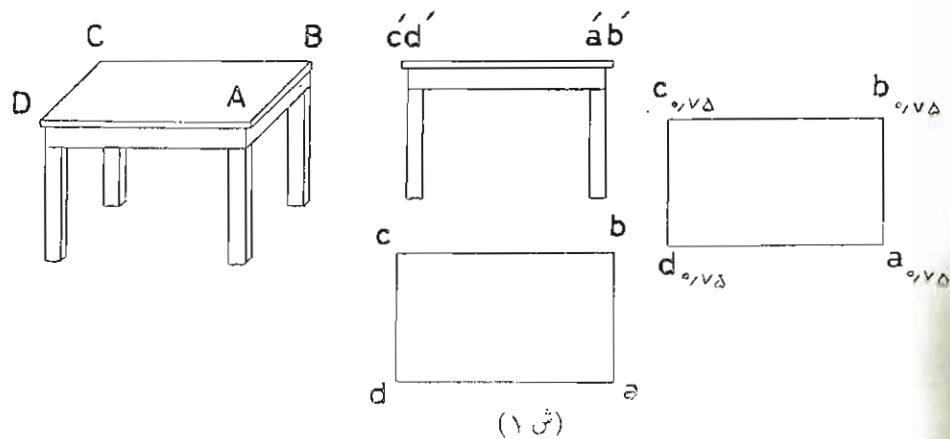
فهرست مندرجات

صفحه	عنوان
	بخش اول - هندسه رقومی
۱	فصل اول - مقدمات
۱۴	فصل دوم - نقطه و خط
۲۳	خطهای مهم
۲۴	اوضاع مختلف دوخط
۳۳	فصل سوم - صفحه
۴۴	اوضاع مختلف خط و صفحه
۴۸	فصل مشترکها
۶۴	فصل چهارم - تسطیح
۷۵	فصل پنجم - موارد استعمال
۱۰۱	فصل ششم - چندوجهیها
	بخش دوم - هندسه ترسیمی
۱۱۶	فصل اول - نقطه
۱۱۶	نمایش نقطه
۱۳۰	فصل دوم - خط
۱۶۵	فصل سوم - صفحه
۱۸۶	فصل چهارم - اوضاع مختلف خط و صفحه
۱۸۶	۱- اوضاع مختلف دو صفحه

فصل اول

مقدمات

۱- انواع تصویر - در شکل ۱، سه تصویر از يك میز می بینید.



تصویر سمت چپ که نقاشی میز است، میز را بخوبی مجسم می سازد. تصویر وسط شبیه به تصاویری است که ترسیم آن را در رسم یاد گرفته اید و میز یا هر چیز دیگر را با دو تصویر افقی و قائم، یا با عدد بیشتری تصاویر (افقی، قائم، نیمرخ و غیره) نمایش می دهد. تصویر سمت راست نوع خاصی تصویر است که موضوع بحث ما خواهد بود و معروف به تصویر رقومی است.

همه این تصاویر، مانند رسم فنی، بر طبق قواعد مخصوص رسم

۱۹۵	۲- اوضاع مختلف خط و صفحه
۱۹۸	فصل مشترك خط و صفحه
۲۵۲	۳- خطوط و صفحات عمود بر هم
۲۱۴	۴- عمود مشترك دو خط
۲۲۲	مسائل رقومی امتحانات نهایی
۲۴۷	مسائل ترسیمی امتحانات نهایی

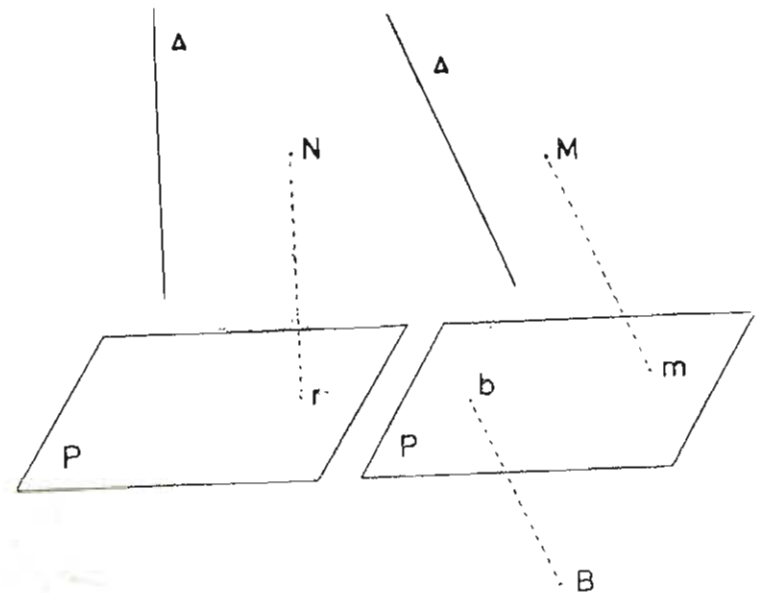
لطفاً این غلطهای چاپی را تصحیح فرمایید :

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۸	۱۳	d	δ
۲۸	سمت راست شکل ۱۶	Δ	Δ _۱
۴۲	۳	مانند،	مانند O،
۶۷	۵	M _δ	m _δ
۱۳۵	شکل ۷ بالای خط زمین	d	d'
۲۴۰	۱۵	αb _δ c	αb _δ c _δ

می‌شوند ، صفحه‌ای که تصویر بر روی آن رسم می‌شود **صفحه تصویر** نام دارد . تصاویر نقاشی اشیا بر طبق قواعد **تصویر مرکزی** رسم می‌شوند ؛ ما از این نوع تصویر صحبت نخواهیم کرد و به بحث در باره **تصویر قائم** خواهیم پرداخت .

۲- تصویر بر يك صفحه - هرگاه صفحه‌ای مانند P به نام **صفحه تصویر** ، خطی مانند Δ به نام **امتداد تصویر** داده شود ، تصویر هر نقطه بر روی صفحه P محل تلاقی این صفحه با خطی است که از آن نقطه به موازات امتداد تصویر رسم شود . در شکل ۲ ، P صفحه تصویر ، Δ امتداد تصویر ، m تصویر نقطه M و b تصویر نقطه B است . تصویر هر نقطه‌ای که در صفحه تصویر باشد بر خودش قرار دارد .

خطی که از هر نقطه به موازات امتداد تصویر کشیده شود **خط مصور**



(ش ۲)

(ش ۳)

آن نقطه نام دارد .

۳- تصویر قائم - هرگاه امتداد تصویر بر صفحه تصویر عمود باشد ، تصویر را **قائم** و در غیر این صورت تصویر را **مایل** گویند .

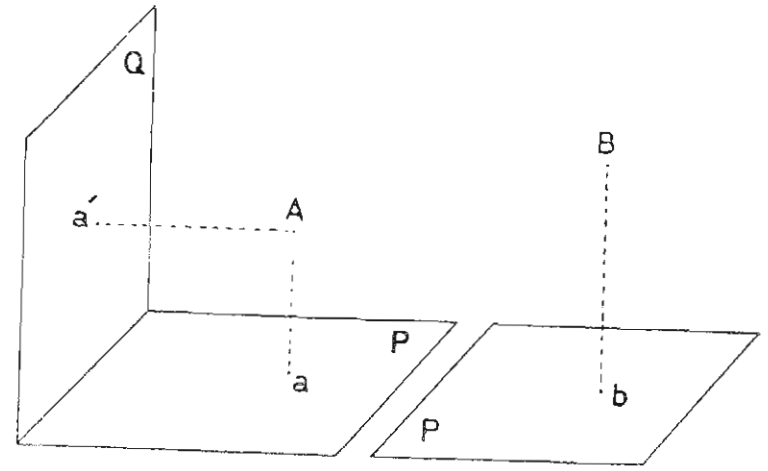
چون عموماً تصاویر **قائم** شکلها رسم می‌شود ، از گفتن صفت **قائم** خودداری می‌کنیم و هر جا که صحبت از تصویر شود مراد تصویر قائم است . در شکل ۳ ، نقطه n تصویر «**قائم**» N است .

۴- چگونه می‌توان از روی تصویر نقطه ، خود نقطه را تعیین کرد - تصاویر اشیا باید بقسمی رسم شوند که از روی آنها بتوان خوداشیا و اجزای مختلف آنها را تعیین کرد ؛ زیرا که تصویر ، وسیله تشخیص و مجسم کردن شیء است .

برای هر نقطه می‌توان روی صفحه تصویر ، تصویری بدست آورد و آن پای عمودی است که از آن نقطه ، بر صفحه تصویر فرود آید . اما فقط با معلوم بودن تصویر يك نقطه نمی‌توان آن نقطه را تعیین کرد . مثلاً در شکل ۴ ، a فقط تصویر نقطه A نیست بلکه تصویر همه نقاطی است که بر روی Aa واقع باشند .

برای اینکه از تصویر نقطه A بتوانیم به وضع خود نقطه A پی ببریم باید علاوه بر تصویر ، عامل دیگری هم داشته باشیم ؛ این عامل یا فاصله نقطه A از صفحه تصویر است یا تصویر دیگری از نقطه A بر روی يك صفحه دیگر است . مثلاً اگر گفته شود که « b تصویر نقطه‌ای است که به فاصله ۳ بالای صفحه تصویر واقع است» می‌توان آن نقطه را به این طریق تعیین کرد : از b عمودی بر صفحه تصویر اخراج کرده (شکل ۴ - ۱) روی آن از مبدا b به طرف بالای صفحه تصویر طولی مساوی ۳ جدای می‌کنیم

و به نقطه مطلوب B می‌رسیم. یا اگر در شکل ۴-ب، تصویر نقطه‌ای بر صفحه P و a' تصویر همان نقطه بر صفحه Q باشد و بخواهیم آن نقطه را تعیین کنیم، باید از a عمودی بر P و از a' عمودی بر Q اخراج کنیم تا یکدیگر را در A قطع کنند. تنها نقطه‌ای است که دو تصویرش a و a' هستند.



(ش ۴)

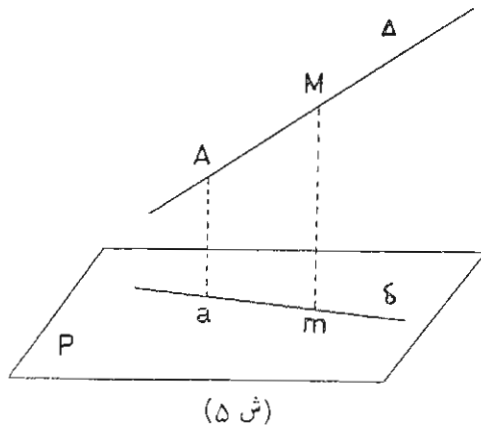
پس برای تعیین هر نقطه باید تصویر آن و فاصله‌اش از صفحه تصویر یا تصاویرش بر دو صفحه، داده شده باشند. نوع اول را تصویر به روش هندسه رقومی و نوع دوم را تصویر به روش هندسه ترسیمی می‌گویند.

۵- هندسه رقومی و هندسه ترسیمی - قسمتی از هندسه که در آن، هر نقطه به وسیله تصویرش توأم با فاصله‌اش از صفحه تصویر مشخص می‌شود **هندسه رقومی** و قسمتی از هندسه که در آن، هر نقطه به وسیله دو تصویرش بر دو صفحه مشخص می‌شود **هندسه ترسیمی** نام دارد.

۶- تصویر یک شکل - تصویر یک شکل، شکلی است که از

مجموعه تصاویر نقاط آن شکل حاصل شود.

۷- تصویر خط راست - قضیه - تصویر خط راست خطی راست است.



(ش ۵)

برهان - فرض می‌کنیم که a تصویر نقطه‌ای مانند A از خط Δ باشد (شکل ۵). صفحه‌ای که بر Δ و مصور نقطه A می‌گذرد بر صفحه P عمود است و با آن فصل مشترکی مانند δ دارد. اکنون ثابت می‌کنیم که δ

تصویر Δ است؛ برای این کار باید ثابت کنیم که تصویر هر نقطه از Δ بر روی δ است.

هرگاه M نقطه غیر مشخصی از Δ باشد، عمود Mm که از آن بر صفحه P فرود آید در صفحه‌ای است که بر Δ و Aa مرور می‌کند. پس نقطه m یعنی فصل مشترک آن عمود با صفحه P روی δ است. صفحه‌ای که بر خط Δ مرور کند و عمود بر صفحه P باشد **صفحه مصور** خط Δ نام دارد.

۸- تصویر هر خط که بر صفحه تصویر عمود باشد یک نقطه است.

۹- هرگاه خطی با صفحه تصویر موازی باشد، با تصویرش بر صفحه

۱- هرگاه خطی بر صفحه‌ای عمود باشد هر صفحه که بر آن خط مرور کند بر آن صفحه عمود است.

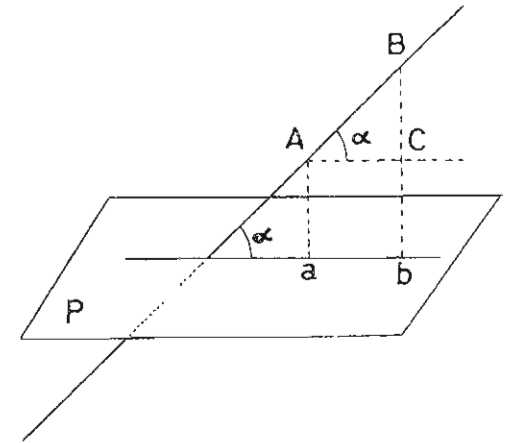
۲- فصل مشترک دو صفحه خطی است مستقیم.

موازی است.^۱

۱۰- قضیه - طول تصویر هر قطعه خط مساوی است با حاصل ضرب طول آن قطعه خط در کسینوس زاویه بین خط و تصویر.

برهان - فرض می کنیم که ab تصویر AB باشد (شکل ۶). از A خطی موازی ab رسم می کنیم تا خط مصور B را در C قطع کند.

الف - زاویه BAC مساوی زاویه بین خط و تصویر آن است.



(ش ۶)

$$(\widehat{BAC} = \alpha)$$

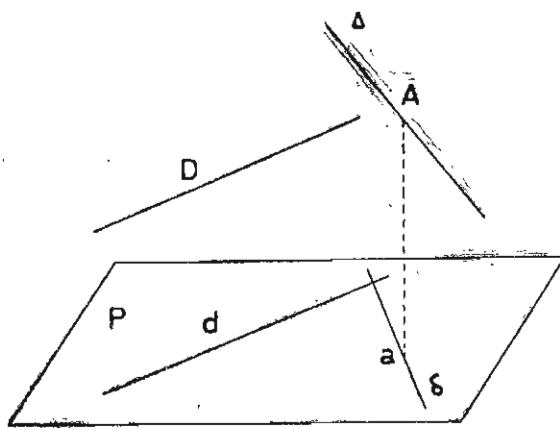
ب - در مثلث قائم الزاویه ABC می توان نوشت :

$AC = AB \cos \alpha$ و چون به جای AC مساوی ab را قرار دهیم خواهیم داشت : $ab = AB \cos \alpha$.

۱۱- قضیه - هر گاه یکی از دو خط عمود بر هم با صفحه تصویر موازی بوده و دیگری بر صفحه تصویر عمود نباشد، تصاویر آن دو خط بر یکدیگر عمودند.

۱- هرگاه خط Δ با صفحه P موازی باشد هر صفحه که بر خط Δ بگذرد و با صفحه P موازی نباشد صفحه P را بر فصل مشترکی موازی با Δ قطع می کند.

برهان - هرگاه Δ بر D عمود باشد و δ تصویر Δ و d تصویر D و



(ش ۷)

D با صفحه تصویر موازی باشد، باید ثابت کنیم که δ بر d عمود است (شکل ۷). در حقیقت D که با صفحه تصویر موازی است، بر هر خطی که عمود بر صفحه تصویر باشد عمود است.

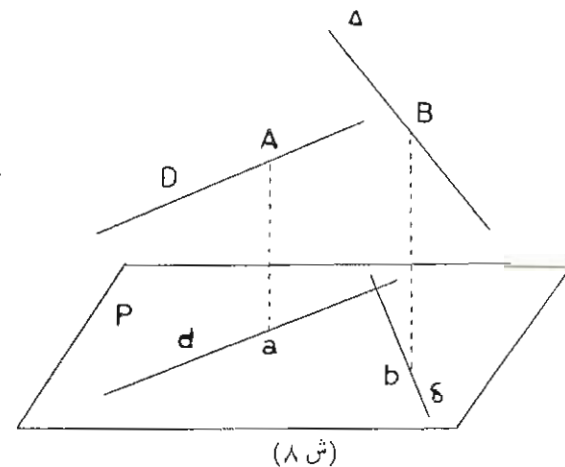
بنابراین اگر Aa خط مصوریکی از نقاط Δ باشد، D بر آن عمود است. چون D بر دو خط Δ و Aa از صفحه مصور Δ عمود است، بر تمام خطوط آن صفحه و از جمله بر δ نیز عمود است؛ و چون d و D متوازیند، d بر δ عمود بوده و زاویه بین d و δ قائمه است.

۱۲- قضیه - اگر تصویرهای دو خط عمود بر هم بر یکدیگر عمود باشند، لااقل یکی از آن دو خط با صفحه تصویر موازی است.

برهان - فرض می کنیم که Δ بر D و δ بر d عمود باشد و یکی از دو خط مثلا Δ ، با صفحه P ، یعنی با تصویرش δ ، موازی نباشد. ثابت می کنیم که خط دیگر، یعنی D ، با صفحه P موازی است (شکل ۸). اگر Aa مصوریکی از نقاط D باشد، بر δ عمود است، و δ که عمود است بر d و بر Aa بر صفحه مصور D عمود می شود. پس D بر δ

-۸-

عمود است .



(ش ۸)

خط D که عمود است بر دو خط غیر-موازی Δ و δ از صفحه مصور Δ ، بر این صفحه عمود است و در نتیجه با صفحه تصویر موازی است!

۱۳- قضیه - اگر تصویرهای دو خط برهم عمود باشند و یکی از آن دو خط با صفحه تصویر موازی باشد، دو خط بر یکدیگر عمودند .

برهان - در شکل ۸، اگر فرض کنیم که D با d موازی و d بر δ عمود باشد، ثابت می کنیم که D بر Δ عمود است .

چون D با d موازی است، عمود است هم بر δ (که بر d عمود است) و هم بر مصور Bb (که بر صفحه تصویر عمود است)؛ پس D بر صفحه مصور خط Δ عمود می شود، یعنی بر همه خطوط آن از جمله بر Δ عمود است.

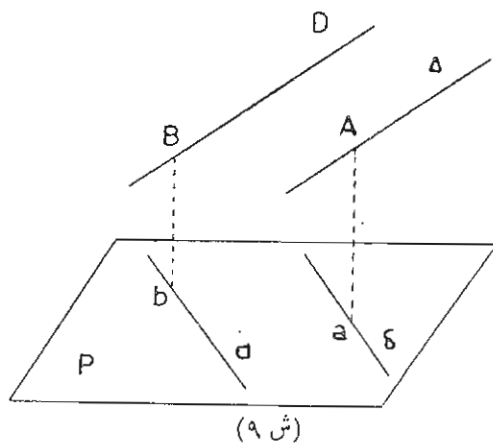
۱۴- قضیه - تصویرهای خطوط متوازی با یکدیگر موازیند.

برهان - فرض می کنیم که Δ با D موازی باشد (شکل ۹) .

چون دو مصور Aa و Bb نیز باهم موازیند، صفحات مصور Δ و D باهم موازی هستند و فصل مشترکهایشان با صفحه P (یعنی δ و d تصاویر دو خط)، متوازیند .

۱- خط و صفحه عمود بر یک صفحه با یکدیگر موازیند .

-۹-

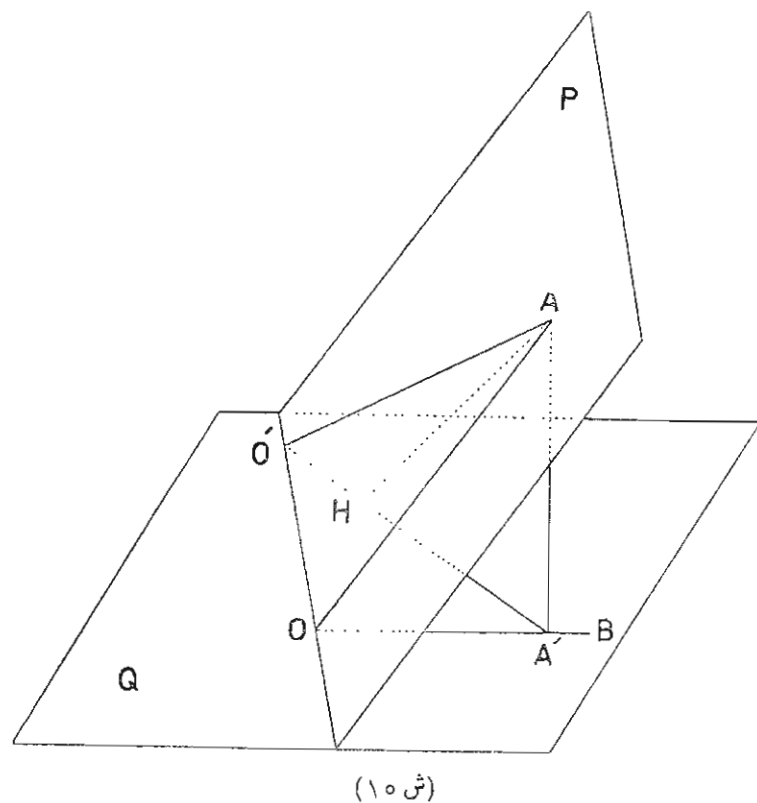


(ش ۹)

۱۵- عکس این قضیه صحیح نیست، یعنی متوازی بودن تصاویر دو خط، دلیل متوازی بودن آنها نیست.

۱۶- تعریف - مسطحه فرجه بین دو صفحه، زاویه ای است که رأسش روی فصل مشترک دو صفحه باشد و

هر ضلعش در یکی از دو صفحه واقع بوده و بر فصل مشترک دو صفحه عمود باشد (شکل ۱۰، \widehat{AOB}).



(ش ۱۰)

هر ضلع مسطحه فرجه دو صفحه را می توان تصویر ضلع دیگر بر روی صفحه آن ضلع دانست .

۱۷- قضیه - زاویه مسطحه دو صفحه ، بزرگترین زاویه ای است که بین خطوط یکی از آن دو صفحه و تصویرشان بر صفحه دیگر تشکیل می شود .

برهان - در یکی از دو صفحه ، از A خط AO را بر فصل مشترك دو صفحه عمود رسم کرده و خط دیگری نیز مانند AO' رسم می کنیم و تصویرش را روی صفحه دیگر A'O' می نامیم (شکل ۱۰) . چون A'O' بر فصل مشترك عمود و A'O' نسبت به فصل مشترك مایل است ، $A'O' > A'O$. اگر طول A'H را مساوی A'O بر A'O' نقل کنیم ، H بین A' و O' واقع می شود و در مثل AHO' زاویه خارجی H بزرگتر از زاویه داخلی O' است : $\widehat{AHA'} > \widehat{AO'A'}$ چون دو مثل AOA' و AHA' برابرند ، $\widehat{AO'A'} = \widehat{AOA'}$ و در نتیجه : $\widehat{AO'A'} > \widehat{AOA'}$.

۱۸- شیب خط - تاثرات زاویه حاده ای که خط با تصویر خود بر روی صفحه ای می سازد ، شیب خط نسبت به آن صفحه نام دارد .

در دو صفحه متقاطع ، خطی که در یکی از آنها عمود بر فصل مشترك رسم شود ، شیبش از شیب خطوط دیگر صفحه بزرگتر است و به این جهت آن را خط بزرگترین شیب صفحه اول نسبت به صفحه دوم می نامند .

یعنی : خط بزرگترین شیب صفحه P نسبت به صفحه Q خطی

است از صفحه P که بر فصل مشترك دو صفحه عمود باشد .

۱۹- مقیاس - تصاویر اشیا را عموماً نمی توان به اندازه واقعی رسم کرد و باید آنها را به يك نسبت كوچك کرده شكلی مشابه با تصویر حقیقی رسم کرد ؛ نسبت تشابه شكل مرسوم و تصویر حقیقی را مقیاس عددی می نامند و آن را به صورت $\frac{1}{k}$ نمایش می دهند (k عدد صحیح) . مثلاً اگر طولی از تصویر حقیقی شكلی برابر يك متر باشد و آن طول در تصویر مرسوم به ۱ سانتیمتر نموده شود ، مقیاس $\frac{1}{100}$ و اگر به ۲ سانتیمتر نموده شود ، مقیاس $\frac{2}{100}$ یا $\frac{1}{50}$ است .

مقیاس عددی تصویر به دو چیز بستگی دارد : یکی صفحه ای که باید تصویر را روی آن رسم کنیم و دیگری شكلی که باید تصویرش را رسم کنیم . هرچه شكل بزرگتر ، یا صفحه ای که باید تصویر را روی آن رسم کنیم كوچكتر باشد ، مقیاس كوچكتر خواهد بود .

مثلاً تصویر يك میز را می توان به مقیاس $\frac{1}{10}$ روی يك صفحه كاغذ معمولی كشید اما تصویر يك خانه را باید لااقل به مقیاس $\frac{1}{100}$ و تصویر يك شهر را به مقیاس $\frac{1}{1000}$ یا $\frac{1}{10000}$ و نقشه يك كشور را مثلاً با مقیاس $\frac{1}{1000000}$ رسم کرد .

غالباً به جای مقیاس عددی ، مقیاس خطی (شكل ۱۱) بكار می برند . مقیاس خطی عبارت از دو خط متوازی نزديك به هم (گاهی يك خط) است که در گوشه نقشه یا شكل می كشند و قطعات متوالی



(ش ۱۱)

مساوی واحد طول که به مقیاس تحویل شده باشد بر روی آن جدا می کنند؛ مثلاً اگر واحد طول متر باشد، در مقیاس $\frac{1}{1000}$ ، که يك سانتیمتر نمایش يك متر است، بر مقیاس خطی قطعات يك سانتیمتری، و در مقیاس $\frac{1}{500}$ قطعات ۲ سانتیمتری، جدا کرده و از چپ به راست با اعداد ۱، ۲، ۳، ... شماره گذاری می کنند.

غالباً اولین قطعه طرف چپ مقیاس خطی را به ۱۰ جزء مساوی تقسیم می کنند که هر جزء نماینده $\frac{1}{10}$ واحد طول تحویل شده است؛ این تقسیمات جزء را از راست به چپ شماره می گذارند و این قسمت را پاشنه مقیاس می نامند. از پاشنه مقیاس برای تعیین طولهای کوچکتر از ۱ استفاده می شود.

برای تعیین فاصله حقیقی دو نقطه که تصاویر آنها a و b باشند، دهانه پرگار را به اندازه ab باز می کنیم و آن را روی مقیاس می گذاریم و فاصله را می خوانیم.

در هندسه رقومی همیشه با واحد سروکار داریم. مقصود از واحد همه جا واحدی است که برای اندازه گیری ابعاد شکل اختیار کرده و به مقیاس تحویل نموده ایم.

اگر برای واحد، سانتیمتر یا طول مشخص دیگری اختیار نشود ممکن است پاره خطی را به منزله واحد اختیار کنید و در کنار شکل آن را نمایش دهید.

خلاصه مطالب مهم :

۱ - تصویر غالباً وسیله خوبی برای بیان مقصود است.

۲ - تصویر را به دو نوع می توان تقسیم کرد :

الف - تصویری که طبق قواعد نقاشی کشیده می شود و اشیا را بطوری که با چشم دیده می شوند مجسم می سازد.

ب - تصویری که با قواعد هندسه رقومی و هندسه ترسیمی رسم می شود و اشیا را بطوری که هستند مشخص می سازد.

۳ - تصویر نقطه بر صفحه، پای عمودی است که از نقطه بر صفحه فرود آید.

۴ - تصویر نقطه بنهایی برای مشخص کردن نقطه کافی نیست. در هندسه رقومی، علاوه بر تصویر، رقوم نقطه نیز داده می شود.

۵ - تصویر خط مستقیم خطی است مستقیم.

۶ - هرگاه یکی از دو خط عمود برهم با صفحه تصویر موازی و دیگری بر صفحه تصویر عمود نباشد تصویرهای آن دو خط برهم عمود خواهند بود.

۷ - اگر تصاویر دو خط برهم عمود باشند و لااقل یکی از آن دو خط با صفحه تصویر موازی باشد، دو خط بر یکدیگر عمودند.

۸ - طول تصویر يك پاره خط مساوی است با طول آن پاره خط ضرب در کسینوس زاویه بین خط و تصویرش.

۹ - تصاویرهای خطوط متوازی باهم موازیند.

۱۰ - خط بزرگترین شیب صفحه P نسبت به صفحه Q خطی است که در صفحه P بر فصل مشترك دو صفحه عمود رسم شود.

نقطه و خط

۱- موضوع هندسه رقومی، نمایش اشکال فضایی است به وسیله تصاویر آنها بر یک صفحه و فواصل نقاطشان از آن صفحه.

۲- صفحه تصاویر - چون برای مطالعه نقشه، معمولاً آن را روی یک صفحه افقی قرار می‌دهند، صفحه تصاویر را، که در حقیقت همان صفحه‌ای است که روی آن شکل می‌کشیم، صفحه افقی می‌نامند. هنگامی که روی کاغذ یا تخته سیاه تصاویر اشکال را می‌کشیم کاغذ یا تخته سیاه را به جای صفحه افقی اختیار می‌کنیم.

در هندسه رقومی عموماً به جای گفتن صفحه افقی تصویر، اصطلاح صفحه مقایسه را بکار می‌برند، زیرا که در حقیقت وضع نقاط را با صفحه تصویر مقایسه می‌کنیم.

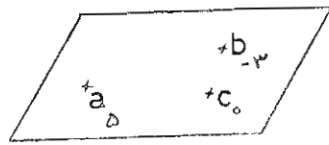
۳- رقوم نقطه - فاصله هر نقطه از صفحه مقایسه، رقوم آن نقطه نام دارد.

بر طبق قرارداد، بر حسب آنکه نقطه‌ای روی صفحه مقایسه یا بالا یا زیر آن باشد، بترتیب رقومش صفر یا مثبت یا منفی است.

نقطه‌ای را که فاصله‌اش از صفحه مقایسه، یعنی رقومش، عدد

صحیح باشد، نقطه صحیح الرقوم می‌گویند.

۴- نمایش تصویر نقطه - ملخص نقطه - تصویر هر نقطه را با همان حرفی که اسم نقطه است ولی با حرف کوچک نمایش می‌دهیم و



(ش ۱)

رقوم آن را، به شکل اندیس، در طرف راست و پایین آن می‌نویسیم.

در شکل ۱، a_5 نمایش نقطه A

است به فاصله ۵ بالای صفحه مقایسه و نقطه c_0 نمایش نقطه C است روی صفحه مقایسه و نقطه b_3 نمایش نقطه B است به فاصله ۳ زیر صفحه مقایسه.

تصویر نقطه‌ای را که رقومش در کنارش نوشته شده باشد، تصویر رقوم‌دار نقطه می‌گویند؛ در ترسیم،

a_5

c_0

(ش ۲)

عملاً صفحه مقایسه را به شکل

متوازی الاضلاع محدود نمی‌سازند

(شکل ۲) و تصاویر نقاط، به تناسب

بزرگی و کوچکی شکل، در سراسر صفحه پراکنده‌اند.

نقطه فضایی را با حرف تصویر و رقومش نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم؛ مثلاً نقطه فضایی A را که تصویرش a و رقومش ۵ است مانند شکل ۲ به صورت a_5 نمایش می‌دهیم و اینطور می‌خوانیم: a رقوم ۵.

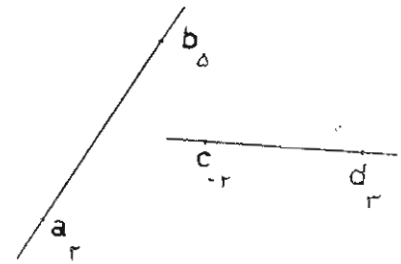
گاهی نیز نقطه را با حرف بزرگ و بی‌رقوم نام می‌بریم.

تصویر نقطه و نام آن و رقومش را، روی هم، ملخص نقطه می‌گویند

۵- ملخص شکل فضایی - ملخص هر شکل فضایی F شکلی

است که از مجموعه تصاویر رقوم دار نقاط مختلف شکل I' حاصل می شود.
در ملخص يك شكل، عموماً تصویر و رقوم نقاط مهم آن را تعیین می کنند بقسمی که به كمك ملخص این نقاط بتوان ملخص سایر نقاط شكل را کامل کرد؛ مثلاً ملخص يك خط

مستقیم به وسیله ملخص دو نقطه اش مشخص می شود مانند خط $a_p b_p$ و $c_p d_p$ (شكل ۳).



۶- خط قائم - خط قائم خطی

است که بر صفحه مقایسه عمود

(ش ۳)

باشد. تصویرهای تمام نقاط خط قائم بر هم منطبق هستند، یعنی تصویر خط قائم، يك نقطه است. گاهی برای اینکه تصویر خط قائم با تصویر نقطه اشتباه نشود، تصویر خط قائم را در داخل دایره کوچکی می گذارند.

۷- تسطیح خط بر صفحه مقایسه - هرگاه $a_p b_p$ (شكل ۴) تصویر

رقوم دار AB

باشد و صفحه

مصور AB را

در حول فصل

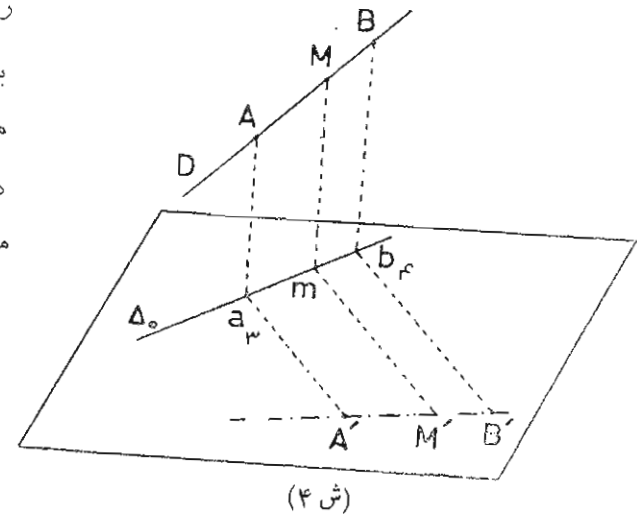
مستركش با صفحه

مقایسه، یعنی

در حول Δ_0

به اندازه 90°

دوران دهیم تا



بر صفحه مقایسه منطبق شود، AB به وضع $A'B'$ درمی آید؛ $A'B'$ را تسطیح خط AB در حول Δ_0 بر صفحه مقایسه می گویند.

در موقع تسطیح خط AB بر صفحه مقایسه، هر نقطه آن مانند A يك ربع دایره به مرکز a می پیمايد که صفحه اش بر Δ_0 ، یعنی بر ab عمود است و A به وضع A' قرار می گیرد بقسمی که:

$$aA' = aA = A \text{ نقطه رقوم}$$

برای تسطیح هر نقطه مانند a_p از خط D، کافی است که در صفحه مقایسه از a عمودی بر تصویر خط اخراج کرده و به اندازه رقوم نقطه بر آن جدا کنیم تا A' تسطیح a_p بدست آید.

برای تسطیح خط، دو نقطه آن را تسطیح کرده و آنها را به هم وصل می کنیم. چنانچه تسطیح خطی معلوم باشد، برای بدست آوردن تسطیح هر نقطه مانند m واقع بر همان خط، از m عمودی بر ab اخراج می کنیم تا $A'B'$ را در M' قطع کند؛ M' تسطیح m است.

فایده تسطیح خط بر صفحه مقایسه این است که يك خط فضایی را که از دسترس خارج است روی صفحه مقایسه می آورد و در دسترس ما قرار می دهد تا بر آن طولی جدا کنیم، یا نقطه ای را معین سازیم و یا مسائلی نظیر اینها را حل کنیم.

در تسطیح خط، جزئی از خط که بالای صفحه مقایسه است، در يك طرف تصویر خط، یعنی در يك طرف ab، تسطیح می شود و جزئی که زیر صفحه مقایسه است، در طرف دیگر ab، به عبارت دیگر، نقاطی که رقومشان مثبت است در يك طرف ab و آنها که رقومشان منفی است در طرف دیگر ab تسطیح می شوند. رقوم نقطه تلاقی تسطیح و تصویر

خط صفر است .

می توان خط را ، به جای تسطیح بر صفحه مقایسه ، بر صفحه ای که موازی صفحه مقایسه باشد تسطیح کرد ؛ در این صورت روی عمودی که از تصویر نقطه بر تصویر خط اخراج می کنیم طولی مساوی اختلاف رقوم نقطه و رقوم صفحه ای که خط بر آن تسطیح می شود جدا می کنیم تا تسطیح نقطه بر آن صفحه بدست آید .

در شکل ۵ ، $A'B'$ ، تسطیح

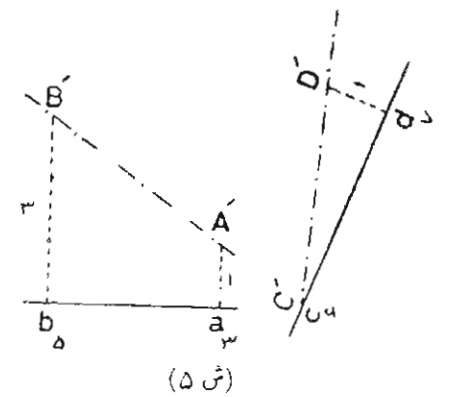
خط $a_p b_h$ بر صفحه ای به رقوم ۲

و خط $C'D'$ تسطیح خط $c_d d_p$

بر صفحه ای به رقوم ۶ است .

برای اینکه بین تسطیح و

تصویر خط تمایزی باشد ، معمولاً



(ش ۵)

تسطیح را با خط و نقطه نمایش می دهیم و تصویر را با خط تمام .

۸- ترفیع خط - اگر خطی مانند AB (شکل ۴) را در $A'B'$

بر صفحه مقایسه تسطیح کنیم و بعد صفحه تصویر را در حول فصل مشترک ab

به اندازه 90° در جهت عکس دورانی که تسطیح را انجام داده ایم دوران

دهیم تا خط $A'B'$ به وضع اصلی خود ، AB ، در آید ، می گوئیم که

خط $A'B'$ را ترفیع کرده ایم .

دو عمل ترفیع و تسطیح عکس یکدیگرند . برای ترفیع هر نقطه

خط مانند M' که تسطیحش معلوم باشد ، از M' عمودی بر تصویر خط

فرود می آوریم تا آن را در m قطع کند ، m تصویر نقطه مطلوب است .

چون فاصله تسطیح نقطه از تصویرش مساوی رقوم نقطه

است ، mM' برابر رقوم m است که اندازه آن را تعیین کرده و زیر m می نویسیم .

۹- فاصله دو نقطه - فاصله دو نقطه را یا با محاسبه یا به وسیله

ترسیم تعیین می کنیم .

الف - طریقه محاسبه - اگر از A (شکل ۶) خط AB'' را

موازی ab رسم کنیم تا خط مصور نقطه B را در B'' قطع کند ، در مثلث

قائم الزاویه $AB''B$ می توان نوشت :

$$AB^2 = AB''^2 + B''B^2$$

$$AB^2 = ab^2 + (b \text{ رقوم} - a \text{ رقوم})^2 = ab^2 + (n - m)^2$$

یا طول ab ، تصویر خط ،

را اندازه گرفته و به کمک

دستور بالا طول AB را

تعیین می کنیم .

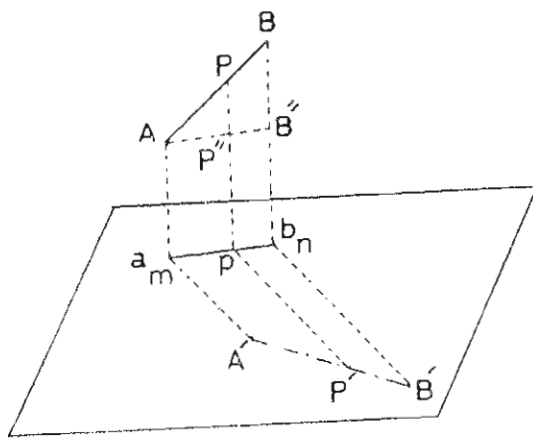
ب- طریقه ترسیم -

خط AB را در $A'B'$

بر صفحه مقایسه تسطیح

می کنیم و آن را اندازه

می گیریم .



(ش ۶)

تمرین ۱- از نقطه a_p در روی خط $a_p b_h$ طولی مساوی ۵ جدا کنید.

تمرین ۲- نقطه a_h و b تصویر بی رقوم نقطه ای داده شده و فاصله

حقیقی دو نقطه ۴ است . رقوم نقطه b را بدست آورید (از راه محاسبه و ترسیم).

۱۰- دو مسئله - مسئله اول - p تصویر بی رقوم يك نقطه

از خط $a_m b_n$ داده شده است ، رقوم آن را بدست آورید .

الف - **طریقه محاسبه** - اگر رقوم p را x فرض کنیم (شکل ۶)، در مثلث $AB''B$ ، خط $P''P$ موازی $B''B$ است و به موجب قضیه تالس

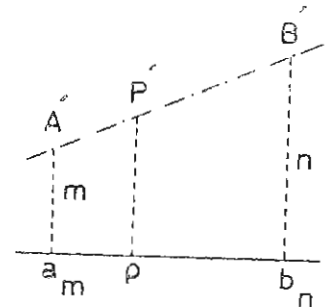
$$\frac{P''P}{B''B} = \frac{AP''}{AB''}$$

$$\frac{x - m}{n - m} = \frac{ap}{ab} \quad \text{یا}$$

$$x = (n - m) \frac{ap}{ab} + m \quad \text{پس}$$

ب - **طریقه ترسیم** - $a_m b_n$ را در $A'B'$ و p را در P' تسطیح

می کنیم (شکل ۷) و pP' را اندازه می گیریم ؛ pP' مساوی رقوم نقطه p است .



مسئله دوم - مسئله عکس - بر

خط $a_m b_n$ نقطه ای تعیین کنید که رقوم

آن h باشد .

(ش ۷)

طریقه محاسبه - اگر نقطه مطاب P را و فاصله p از a را y

فرض کنیم (شکل ۶) ، خواهیم داشت :

$$\frac{P''P}{B''B} = \frac{AP''}{AB''}$$

$$\frac{h - m}{n - m} = \frac{y}{ab} \quad \text{یا}$$

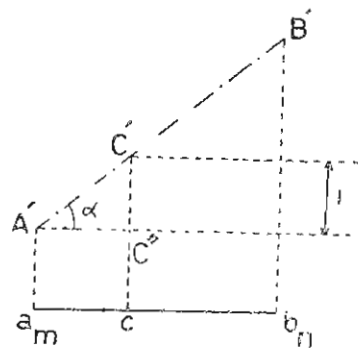
$$y = ab \times \frac{h - m}{n - m} \quad \text{یعنی}$$

طریقه ترسیم - پس از آنکه $a_m b_n$ را در $A'B'$ تسطیح کردیم ، روی bB' طول bK را مساوی h جدا می کنیم و از K خطی موازی ab می کشیم تا $A'B'$ را در P' قطع کند ؛ از P' عمودی بر ab فرود می آوریم تا p تصویر نقطه مطلوب P از خط AB که رقومش h است بدست آید .

۱۱- **اثر خط** - اثر خط یعنی فصل مشترك آن باصفحه مقایسه ، بنا براین نقطه ای است از خط ، بدرقوم صفر .

تمرین ۳ - برخط $a_p b_p$ که طول تصویرش $ab = ۶$ است (۱) نقطه ای به ارتفاع ۵ پیدا کنید و آن را m بنامید . (۲) نقطه p به فاصله ۲ از a داده شده است ؛ رقوم آن را بدست آورید . (۳) اثر خط را بدست آورید .

۱۲- **میل خط ، شیب و فراز خط** - همانطور که می دانید ، میل خط زاویه آن باصفحه مقایسه یعنی با تصویرش برصفحه مقایسه است . **تائزات میل** هر خط را شیب و کتانژانت میل را فراز یا اساس خط می گویند .



(ش ۸)

$$\text{شیب} = p = \tan \alpha$$

$$\text{فراز} = i = \cot \alpha$$

هرگاه خط $a_m b_n$ (شکل ۸) را تسطیح کرده و بر آن نقطه ای مانند c تعیین کنیم که رقومش از رقوم a يك واحد بیشتر باشد ، می توان نوشت :

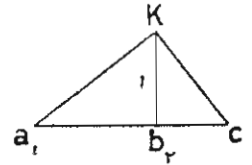
$$i = \text{فراز} = \cot \alpha = \frac{A'C''}{C''C'} = \frac{ac}{1} = ac$$

$$p = \text{شیب} = \frac{1}{ac} \quad \text{و}$$

بنابراین: (۱) فراز هر خط، فاصله بین تصاویر دو نقطه آن است که اختلاف رقمشان ۱ باشد.

(۲) شیب هر خط عکس فاصله تصاویر دو نقطه آن است که اختلاف رقمشان ۱ باشد، بنا براین فراز هر خط را می توان بر روی تصویر آن بدست آورد. برای تعیین شیب خط باید عکس فراز آن را بسازیم؛ این کار به کمک رسم مثلث قائم الزاویه انجام می شود؛ مثلاً برای ساختن

عکس $ab=i$ (شکل ۹) که فراز خط a_1b_1 است، از b عمودی بر ab اخراج می کنیم و طول $bk=1$ را بر آن جدا کرده و از k خطی بر ak عمود می کنیم تا امتداد ab را در c قطع



(ش ۹)

کند؛ bc عکس فراز، یعنی شیب خط a_1b_1 است زیرا:

$$bk^2 = 1 = ab \cdot bc$$

$$bc = \frac{1}{ab} = \frac{1}{i} = p$$

۱۳- مدرج کردن خط - مدرج کردن خط یعنی تعیین نقاط صحیح الرقوم خط که اختلاف رقمشان ۱ باشد. برای مدرج کردن خط، يك نقطه صحیح الرقوم روی تصویر خط اختیار کرده و در طرفین آن به اندازه فراز خط جدا می کنیم تا نقطه ای که رقمش با آن، به اندازه ۱ اختلاف داشته باشد، بدست آید. به همین ترتیب نقاط متعددی را تعیین کرده و خط را مدرج می کنیم.

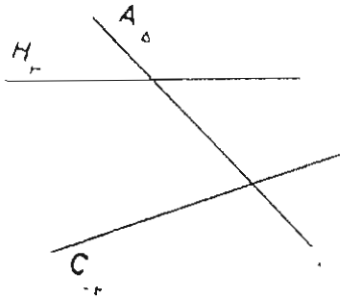
تمرین ۴- اولاً خط a_1b_1 که فاصله a و b در روی آن ۸ است داده می شود؛ شیب و فراز خط را بدست آورید و آن را مدرج کنید.
ثانیاً خط m_1n_1 که فاصله m و n در روی آن ۵ است داده می شود؛ شیب و فراز این خط را تعیین کرده و آن را مدرج کنید.

خطهای مهم

۱۴ - خطهای مهم عبارتند از خطهای موازی با صفحه مقایسه یا عمود بر صفحه مقایسه. اولی را **افقی** و دومی را **قائم** می نامند.

۱۵ - خط افقی آن است که با صفحه مقایسه موازی باشد، پس تمام نقاط آن دارای يك رقم هستند.

خط افقی را معمولاً بایک حرف بزرگ که رقم خط در گوشه راست و پایین آن نوشته شده باشد نمایش می دهند، مانند خطهای H_3 و A_5 و C_7 (شکل ۱۰).



شیب خط افقی صفر و فراز آن بینهایت بزرگ است.

(ش ۱۰)

۱۶ - خط قائم یا شاغولی آن است که بر صفحه مقایسه عمود باشد. تصاویر تمام نقاط آن بر یکدیگر منطبق هستند، یعنی **تصویر خط قائم نقطه است**. برای متمایز ساختن تصویر خط قائم از تصویر نقطه، گاهی تصویر خط قائم را در داخل دایره کوچکی قرار می دهند. فراز خط قائم صفر و شیب آن بینهایت بزرگ است.

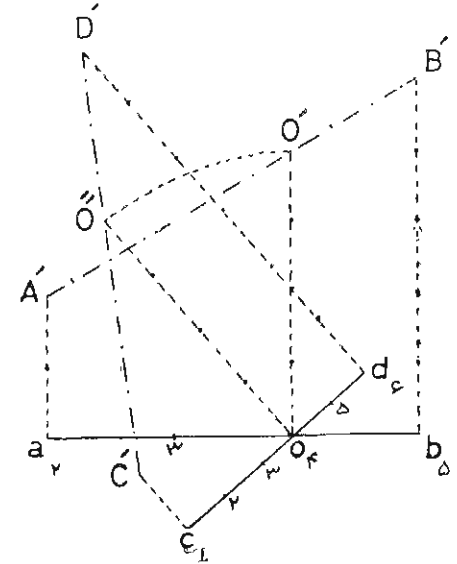
ارضاع مختلف دوخط

۱۷ - می‌دانیم که اگر بر دو خط بتوانیم يك صفحه مرور دهیم، این دوخط یا متقاطع هستند یا متوازی و در غیر این صورت متناظرند.

خطوط متقاطع

۱۸ - قضیه - شرط لازم و کافی برای اینکه دوخط متقاطع باشند این است که تصاویرشان یکدیگر را قطع کنند و نقطه تقاطع بر روی هر دو خط دارای يك رقوم باشد.

الف - لزوم شرط - وقتی که دوخط متقاطع باشند نقطه مشترکی دارند که چون روی هر دوخط است تصویرش روی هر دو تصویر می‌افتد، یعنی دو تصویر متقاطع می‌شوند و چون يك نقطه بیشتر نیست رقوم آن روی هر دو خط یکی است.



(ش ۱۱)

ب - کفایت شرط - اگر تصاویرهای دوخط متقاطع باشند و نقطه تقاطع بر روی هر دوخط دارای يك رقوم باشد، آن نقطه روی هر دو خط واقع است،

یعنی دو خط يك نقطه مشترك دارند و متقاطعتند.

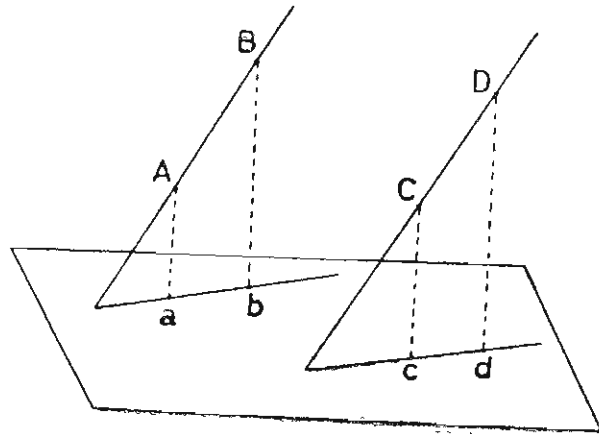
تحقیق متقاطع بودن دو خط را ممکن است از راه محاسبه انجام

داد و رقوم نقطه تقاطع را بر هر دو معین کرد، ولی بهتر است که این کار با ترسیم صورت پذیرد (شکل ۱۱).

خطوط متوازی

۱۹ - قضیه - هرگاه دوخط متوازی باشند، الف - تصویرها متوازیند، ب - فرازها متساوینند، ج - ترقی رقومها در يك جهت است.

الف - تصویرها متوازیند، زیرا صفحات مصور دو خط متوازیند.



(ش ۱۲)

ب - فرازها متساوینند، زیرا که میل دو خط متوازی نسبت به صفحه مقایسه یکی است، پس کتانژانت میلها، یعنی فرازهای دو خط نیز یکی است.

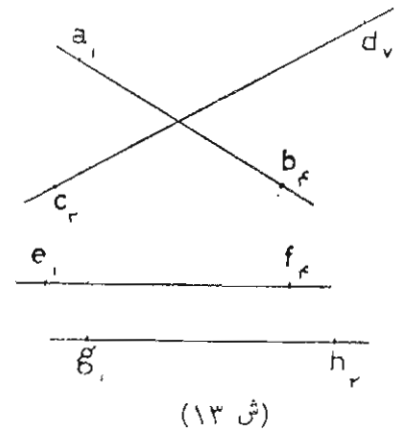
ج - ترقی رقومها در يك جهت است، زیرا که اگر مثلاً بر روی خط AB (شکل ۱۲) از چپ به راست رقومها زیاد شوند بر روی CD هم که با AB موازی است رقومها از چپ به راست ترقی می‌کنند.

۲۰ - دو خط که نه متوازی باشند و نه متقاطع متناظرند، مانند

دو خط a_1b_1 و c_1d_1 یا دو خط e_1f_1 و g_1h_1 در شکل ۱۳.

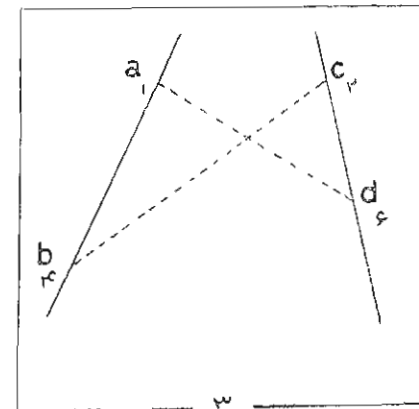
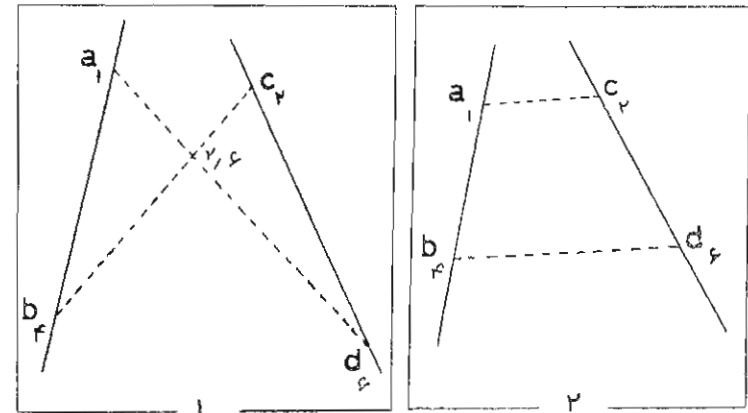
۴۱ - مسئله - تصاویرهای دو خط در خارج حدود شکل متقاطعونند؛ وضع آنها را نسبت به یکدیگر تحقیق کنید.

حل - دو نقطه، مثلاً a_1 و b_1 از یکی را به دو نقطه، مثلاً c_1 و d_1 از خط دیگر وصل می‌کنیم. اگر دو خطی که به این ترتیب حاصل



(ش ۱۳)

می‌شوند متقاطع (شکل ۱۴-۱) یا متوازی (شکل ۱۴-۲) باشند، یک

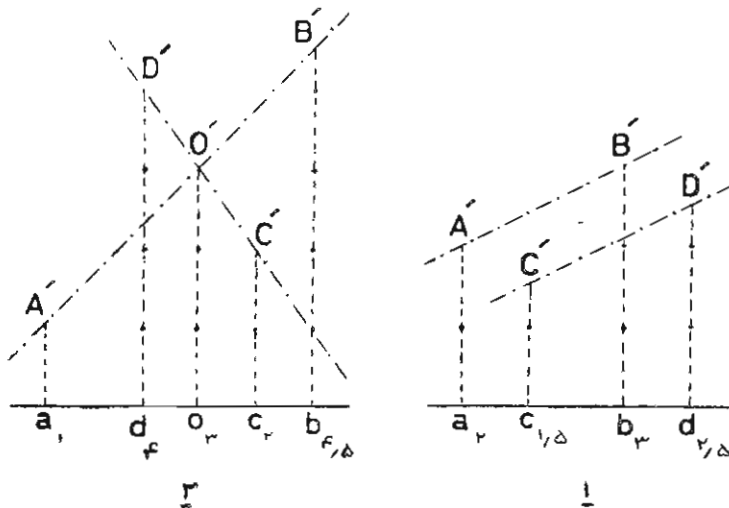


(ش ۱۴)

صفحه تشکیل می‌دهند و چون دو نقطه از هر یک از دو خط a_1b_1 و c_1d_1 در آن صفحه‌اند، دو خط در یک صفحه هستند پس متقاطعند. اما اگر دو خط a_1d_1 و c_1b_1 متناظر باشند (شکل ۱۴-۳)، دو خط مفروض در یک صفحه نیستند.

۴۲ - مسئله - تصاویر دو خط بر یکدیگر منطبقند، وضع آنها را نسبت به هم معین کنید.

صفحه‌مصور دو خط را تسطیح می‌کنیم تا $A'B'$ و $C'D'$ تسطیحاتی دو خط بدست آید. اگر $A'B'$ و $C'D'$ متوازی باشند، دو خط با



(ش ۱۵)

یکدیگر موازی هستند (شکل ۱۵-۱) و گرنه یکدیگر را قطع می‌کنند (شکل ۱۵-۲)؛ رقوم نقطه تقاطع را در تسطیح بدست می‌آوریم.

بدیهی است با توجه به فراز خطها و جهت ترقی رقوم، بدون تسطیح نیز می‌توان وضع دو خط را معین کرد.

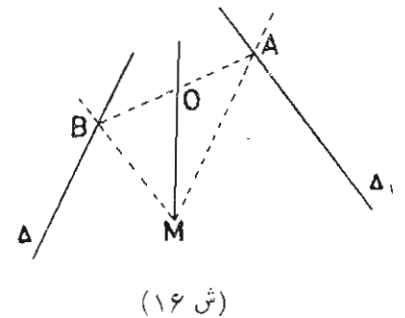
تمرین ۵ - در شکل ۱۵-۲، بی‌آنکه از تسطیح استفاده کنید، رقوم نقطه تقاطع دو خط را حساب کنید.

۲۳ - حل يك مسئله مسطحه - دو خط Δ و Δ_1 در خارج حدود شكل متقاطعون. از نقطه مفروض M واقع در صفحه دو خط، خطی رسم کنید که بر نقطه تقاطع آنها بگذرد.

این مسئله راه حلهای متعدد دارد. ما در اینجا سه راه را بیان می کنیم.

راه اول - از M دو خط بدموازات Δ و Δ_1 می گذرانیم (شکل ۱۶)

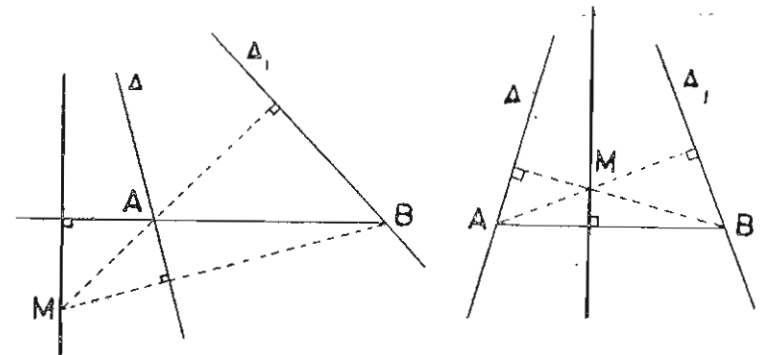
تا Δ_1 و Δ را بترتیب در A و B قطع کنند؛ خطی که از M بد O ، وسط AB ، وصل شود بر نقطه تقاطع Δ و Δ_1 می گذرد (اقتدار متوازی الاضلاع منصف یکدیگرند).



(ش ۱۶)

این راه حل وقتی بکار می رود که M بین Δ و Δ_1 باشد و خطهایی که از M موازی خطوط رسم شوند آنها را در حدود شكل قطع کنند.

راه دوم - از M عمودی بر Δ فرود می آوریم تا Δ_1 را در B



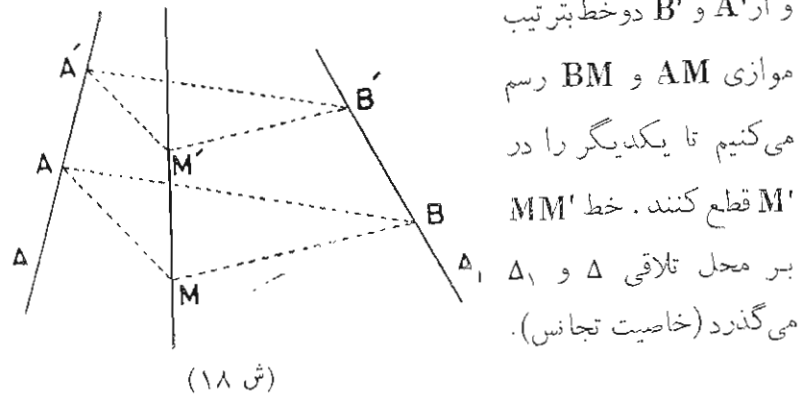
(ش ۱۷)

قطع کند و نیز عمودی بر Δ_1 فرود می آوریم تا Δ را در A قطع کند (شکل ۱۷)، خطی که از M بر AB عمود شود از نقطه تلاقی Δ و Δ_1

خواهد گذشت (خاصیت ارتفاعات مثلث).

راه سوم - خطی بدخواه می کشیم تا Δ را در A و Δ_1 را در

B قطع کند (شکل ۱۸). از M بد A و B وصل می کنیم و از يك نقطه دلخواه، خطی موازی AB می کشیم تا Δ و Δ_1 را در A' و B' قطع کند



(ش ۱۸)

و از A' و B' دو خط بترتیب

موازی AM و BM رسم

می کنیم تا یکدیگر را در

M' قطع کنند. خط MM'

بر محل تلاقی Δ و Δ_1

می گذرد (خاصیت تجانس).

خلاصه مطالب مهم :

۱ - در هندسه رقومی هر نقطه به وسیله تصویر و رقومش (یعنی فاصله اش از صفحه مقایسه) مشخص می شود. نقطه فضایی را با حرف بزرگ لاتین و تصویر آن را با همان حرفی که اسم نقطه فضایی است ولی با حرف کوچک نمایش می دهیم. تصویر نقطه و نام آن و رقوم آن را روی هم ملخص نقطه فضایی می گویند. رقوم نقاط واقع در بالای صفحه مقایسه مثبت و در زیر صفحه مقایسه منفی و در روی صفحه مقایسه صفر است.

۲ - تصویر خط مستقیم خطی است مستقیم. تصاویر دو نقطه آن را به هم وصل می کنیم تا تصویر خط بدست آید.

۳ - تسطیح خط عبارت از این است که صفحه مصور خط را در حول

فصل مشترکش با صفحه مقایسه، به اندازه 90° دوران دهیم تا بر صفحه مقایسه منطبق شود.

۴- برای تسطیح خط از تصویر دو نقطه آن عمودهایی بر تصویر خط رسم می‌کنیم و روی هر يك طولی مساوی رقوم نقطه جدا می‌کنیم و دو نقطه‌ای را که به این ترتیب بدست می‌آیند به هم وصل می‌کنیم.

۵- به کمک تسطیح خط این مسائل را حل می‌کنیم: (۱) اگر تصویر يك نقطه از خط داده شده باشد رقوم آن را بدست می‌آوریم. (۲) اگر رقوم نقطه‌ای از خط معلوم باشد تصویر آن را پیدا می‌کنیم. (۳) زاویه خط با صفحه مقایسه را بدست می‌آوریم. (۴) وضع نقطه‌ای را با خط مقایسه می‌کنیم.

۶- ترفیع عکس تسطیح است.

۷- میل خط، زاویه خط است با تصویرش، یعنی با صفحه مقایسه. تانژانت این زاویه شیب خط و کتانژانت این زاویه فراز خط است. شیب خط مساوی اختلاف رقوم دو نقطه از آن است که فاصله تصاویر ایشان مساوی ۱ باشد. فراز خط مساوی فاصله تصاویر دو نقطه از خط است که اختلاف رقومشان ۱ باشد.

۸- خط افقی با صفحه مقایسه موازی است. همه نقاط آن يك رقوم دارند.

۹- شرط موازی بودن دو خط این است که تصاویرشان متوازی، فزاهایشان متساوی و ترقی رقومشان در يك جهت باشد.

۱۰- شرط تقاطع دو خط این است که تصاویر ایشان متقاطع باشند و نقطه تقاطع بر روی هر دو دارای يك رقوم باشد.

تمرین

۱- تصویر خطی و ملخص يك نقطه a_h آن داده شده است. خط را با

یکی از شرطهای زیر مشخص کنید:

الف - با صفحه مقایسه زاویه 60° بسازد (چند جواب؟).

ب - شیب مساوی $\frac{1}{2}$ باشد (چند جواب؟).

ج - بر روی آن فاصله حقیقی نقطه a_h از نقطه B به رقوم ۷ مساوی ۴ باشد (چند جواب؟) (نقطه B روی خط است).

د - فاصله a_h از نقطه M مساوی ۵ و فاصله a از تصویر M مساوی ۳ باشد (چند جواب؟) (نقطه M روی خط است).

۲- از نقطه a_p خطی با این شرایط رسم کنید:

الف - خط قائم V را در نقطه‌ای به ارتفاع ۶ قطع کند. فراز این خط را بدست آورید و زاویه‌اش را با صفحه مقایسه معین کنید.

ب - با خط مفروض $c_p d_p$ موازی باشد.

ج - خط مفروض $c_p f_p$ را در نقطه‌ای به رقوم ۴ قطع کند. شیب خطی را که بدست می‌آورد از راه ترسیم نمایش دهید.

۳- دو نقطه m_h و n_p که فاصله تصاویرشان ۶ سانتیمتر است مفروضند. بر m_h خطی به شیب ۱ و بر n_p خطی به شیب $\frac{1}{2}$ بگذرانید بقسمی که دو خط یکدیگر را روی صفحه مقایسه قطع کنند. مسئله چند جواب دارد؟

۴- مسئله شماره ۳ را تکرار کنید مشروط به آنکه فاصله تصاویر آنها داده نشده باشد. بعد در عده جوابها و نیز در شرط وجود جواب بحث کنید.

۵- دو نقطه a_p و b_h را به فاصله حقیقی ۳ از یکدیگر بدست آورید. بعد بر آن دو نقطه دو خط به شیبهای معین بگذرانید که یکدیگر را در نقطه‌ای به رقوم ۱ قطع کنند.

۶- بر دو نقطه m_p و n_h دو خط بگذرانید که هر دو با صفحه مقایسه زاویه 45° بسازند و فاصله بین اثرهای آنها $\frac{1}{5}$ سانتیمتر باشد و خط واصل بین آثار آنها موازی امتداد a_h باشد، فاصله m از n ، ۷ سانتیمتر اختیار شود.

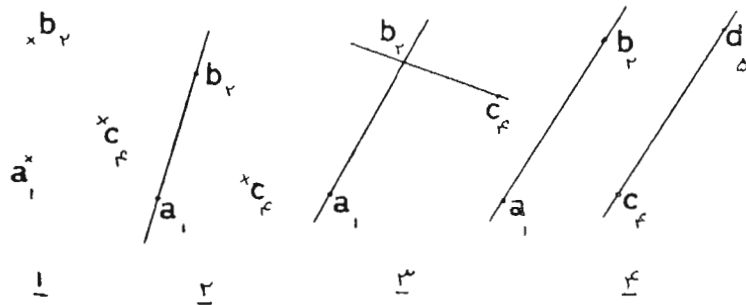
۷- خط قائم V و نقطه a_p که فاصله حقیقی آن از خط قائم ۳ سانتیمتر است داده شده اند. بر a_p خطی بگذرانید که با صفحه مقایسه زاویه 50° بسازد و فاصله اثرش از خط قائم ۱ باشد.

۸- خط قائم V و نقطه b_h داده شده اند (فاصله b از تصویر خط قائم ۵ سانتیمتر است). روی صفحه مقایسه نقطه‌ای پیدا کنید که از b_h به فاصله ۸ و از خط قائم به فاصله ۲ باشد.

فصل سوم

صفحه

۱- نمایش صفحه - در هندسه دیده‌اید که صفحه به وسیله سه نقطه غیر واقع بر یک استقامت، یا یک خط و یک نقطه در خارج آن، یا دو خط متقاطع و یا دو خط متوازی مشخص می‌شود. در هندسه رقومی، صفحه بد وسیله ملخص سه نقطه، یا یک خط و یک نقطه در خارج آن، یا دو خط متقاطع، یا دو خط متوازی نمایش داده می‌شود (شکل ۱).

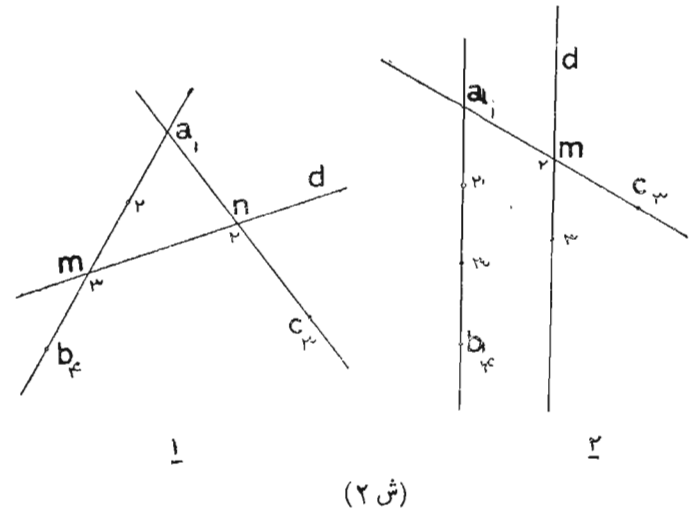


(ش ۱)

بطوری که از شکل نیز بخوبی فهمیده می‌شود، هر یک از چهار صورت بالا یک صفحه را مشخص می‌سازند.

۲- مسئله - صفحه‌ای با سه نقطه نموده شده و تصویر خطی از این صفحه در دست است؛ خط را مدرج کنید.

صفحه $a_1b_4c_3$ و خط d ، تصویر خط فضایی D ، واقع در صفحه ABC مفروضند (شکل ۲)؛ خط d یا هر دو خط a_1b_4 و a_1c_3 را قطع می‌کند (شکل ۲ - ۱) یا با یکی از آنها موازی است (شکل ۲ - ۲).



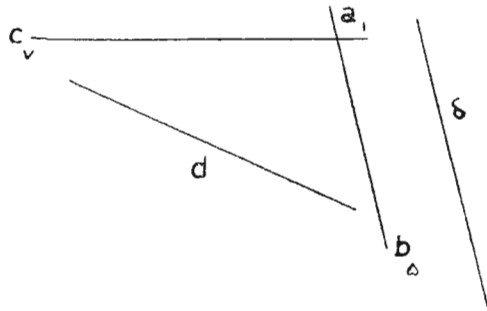
(ش ۲)

در حالت اول، رقوم نقاط برخورد d با خطوط a_1b_4 و a_1c_3 ، یعنی m و n ، را بر روی a_1b_4 و a_1c_3 بدست می‌آوریم؛ رقوم m مساوی ۳ و رقوم n مساوی ۲ است؛ چون اختلاف رقومهای m و n مساوی یک است، فاصله m و n برابر فراز خط D است؛ همینکه فراز خط بدست آمد، خط d را مدرج می‌کنیم.

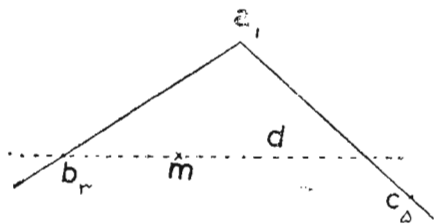
در حالت دوم، خط d با a_1b_4 موازی است و رقوم m ، نقطه برخورد آن با a_1c_3 ، مساوی ۲ است؛ از نقطه m به اندازه فراز خط a_1b_4 بر d جدا می‌کنیم و با استفاده از فراز آن و موازی بودن D و AB خط d را مدرج می‌کنیم.

تمرین - در شکل ۳، خطهای d و δ را به فرض اینکه در صفحه دو خط a_1b_5 و a_1c_7 باشند، مدرج کنید.

۳- مسئله - تصویر نقطه‌ای است واقع در صفحه $a_1b_4c_5$ ؛ رقوم m را مشخص کنید.



(ش ۳)



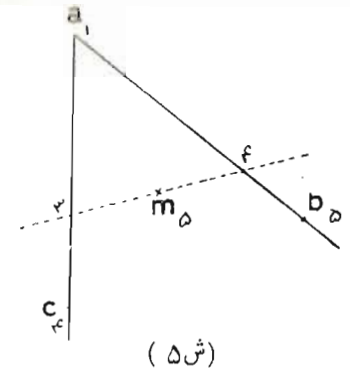
(ش ۴)

۴- مسئله - نقطه‌ای مانند m_5 و صفحه $a_1b_5c_7$ داده شده‌اند؛ تعیین کنید که آیا نقطه m_5 در آن صفحه هست یا نیست.

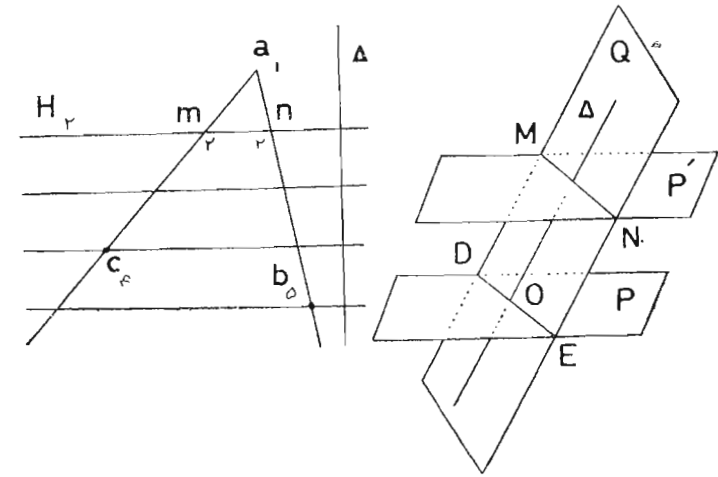
از رقوم نقطه m چشم می‌پوشیم و به فرض اینکه m تصویر نقطه‌ای از صفحه باشد، رقوم آن را بدست می‌آوریم؛ اگر این رقوم با رقوم m ، یعنی ۵، مساوی باشد، m_5 در صفحه است و اگر نه نیست. در شکل ۵، اگر m در صفحه بود، رقومش $3/5$ می‌شد و اکنون $3/5$ نیست، m_5 در صفحه مذکور نیست.

اگر رقومی که برای m به فرض واقع بودن در صفحه، بدست

می آید از رقوم اصلی m ، که در فرض داده شده است کمتر باشد ، نقطه بالای صفحه است و اگر از آن بیشتر باشد ، زیر صفحه قرار دارد . در شکل ۵ نقطه m_5 بالای صفحه است .



۵ - خط‌های افقی صفحه - خط افقی ، یا افقیه هر صفحه مانند Q (شکل ۶) ، فصل مشترك آن است با صفحه‌ای موازی صفحه مقایسه .



(ش ۷)

(ش ۶)

چون تمام نقاط يك خط افقی يك رقوم دارند ، برای رسم افقیه‌ای از صفحه ، مثلاً افقیه رقوم ۲ ، کافی است که دو نقطه رقوم ۲ از صفحه را به یکدیگر وصل کنیم (شکل ۷) .

هر صفحه ، افقیه‌های بیشمار دارد که همه با هم موازیند (زیرا که

فصل مشتركهای يك صفحه با چند صفحه متوازی با یکدیگر موازیند) .
اثر صفحه - افقیه رقوم صفر صفحه ، یعنی فصل مشترك آن با صفحه مقایسه ، اثر صفحه نامیده می‌شود .

۶ - خط بزرگترین شیب صفحه نسبت به صفحه مقایسه -

چون خط بزرگترین شیب هر صفحه نسبت به صفحه مقایسه بر اثر عمود است (شماره ۱۸ فصل اول) ، تصویر خط بزرگترین شیب بر اثر افقی صفحه عمود است (شماره ۱۱ فصل اول) . بنا بر این برای رسم تصویر خط بزرگترین شیب يك صفحه نسبت به صفحه مقایسه ، کافی است که خطی عمود بر تصویر افقیه‌های صفحه رسم کنیم . در شکل ۷ ، خط Δ تصویر خط بزرگترین شیب صفحه $a_1b_5c_5$ نسبت به صفحه مقایسه است ؛ برای مدرج کردن آن از رقوم نقاط برخوردش با افقیه‌ها استفاده می‌کنیم .

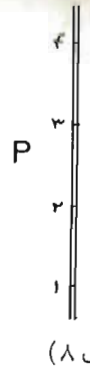
اهمیت خط بزرگترین شیب صفحه در این است که بتنهایی

برای مشخص کردن صفحه کافی است . مثلاً اگر $a_1b_5c_5$ ملخص خط بزرگترین شیب صفحه‌ای نسبت به صفحه مقایسه باشد ، می‌توان تصاویر افقیه‌های صفحه را عمود بر ab کشید و با تعیین رقوم یکی از افقیه‌ها (به کمک خط a_1b_5) صفحه را مشخص کرد .

۷ - مقیاس شیب صفحه - چون خط بزرگترین شیب نسبت به

صفحه مقایسه مهمترین خط صفحه است ، برای متمایز ساختن آن از خط‌های دیگر ، تصویر آن را با دو خط متوازی (شبه به دو خطی که در مقیاس خطی رسم می‌شوند) نمایش می‌دهند و آن را مقیاس شیب صفحه می‌نامند (شکل ۸) . چون زاویه مقیاس شیب هر صفحه با صفحه

مقایسه، زاویه آن صفحه با صفحه مقایسه است، شیب و فراز مقیاس شیب هر صفحه، شیب و فراز آن صفحه اند.



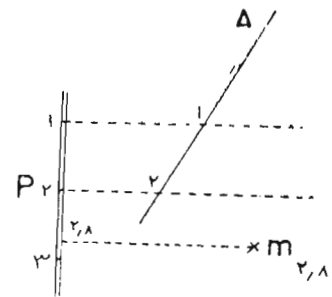
۸ - نمایش يك صفحه - ساده ترین راه برای نمایش يك صفحه استفاده از مقیاس شیب آن است. برای نمونه چند مثال می‌زنیم:

مثال ۱ - خط Δ در صفحه P است (شکل ۹) و می‌خواهیم آن را مدرج کنیم. برای مدرج کردن آن افقیه‌های رقوم ۱ و ۲ از صفحه را رسم می‌کنیم تا از تلاقی آنها با Δ نقاط رقوم ۱ و ۲ از Δ بدست آیند، سپس خط Δ را مدرج می‌کنیم.

مثال ۲ - برای تعیین رقوم نقطه m که در صفحه P باشد، از افقیه‌ای بر مقیاس شیب عمود می‌کنیم و رقوم آن را در روی مقیاس شیب بدست می‌آوریم.

در شکل ۹ رقوم نقطه m مساوی $۲/۸$ است.

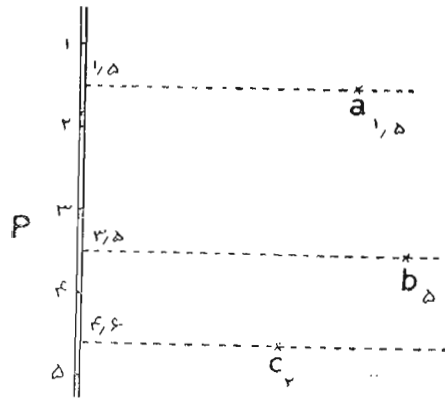
مثال ۳ - برای مشخص کردن وضع نقطه‌ای نسبت به يك صفحه، از تصویر نقطه، عمودی بر مقیاس شیب صفحه رسم کرده و رقوم نقطه تقاطع آن را با مقیاس شیب در روی مقیاس شیب بدست می‌آوریم؛



(ش ۹)

بر حسب آنکه این رقوم با رقوم آن نقطه مساوی، یا بزرگتر از آن

یا کوچکتر از آن باشد، بترتیب نقطه در صفحه، یا زیر صفحه یا در بالای آن است.



(ش ۱۰)

در شکل ۱۰ نقطه $a_{1.5}$ روی صفحه P ، نقطه c_6 زیر صفحه و نقطه $b_{3.5}$ بالای صفحه است.

۹ - صفحات خاص -

الف - صفحه افقی -

صفحه افقی صفحه‌ای است که با صفحه مقایسه موازی

باشد. صفحه افقی مقیاس شیب ندارد؛ زیرا که تمام نقاط آن دارای يك رقومند. تمام خطوط این صفحه افقیه هستند که ممکن است متوازی یا متقاطع باشند. هر شکلی که در يك صفحه افقی باشد، به اندازه حقیقی تصویر می‌شود.

ب - صفحه قائم - صفحه قائم عمود است بر صفحه مقایسه. تصاویر تمام نقاط و خطوط واقع در صفحه قائم، بر فصل مشترك آن با صفحه مقایسه قرار دارند.

تصویر هر شکلی که در صفحه قائم باشد، خطی است مستقیم.

۱۰ - مسئله - وضع خط AB را نسبت به صفحه P معین کنید.

حل - دو نقطه از خط، مثلاً a و b را در نظر گرفته از رقوم آنها صرف نظر می‌کنیم و با فرض اینکه آن نقاط، تصاویر دو نقطه از صفحه باشند، رقوم آنها را بدست می‌آوریم و آن نقاط را m و n

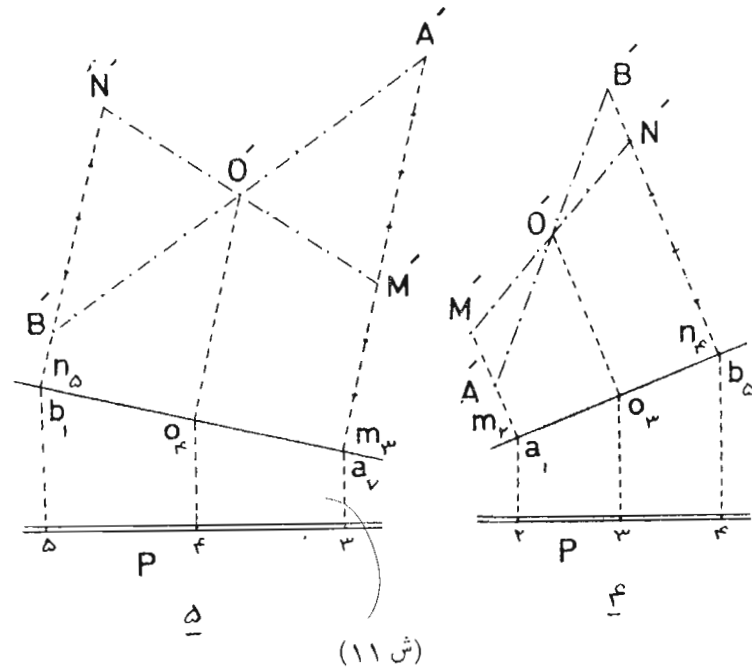
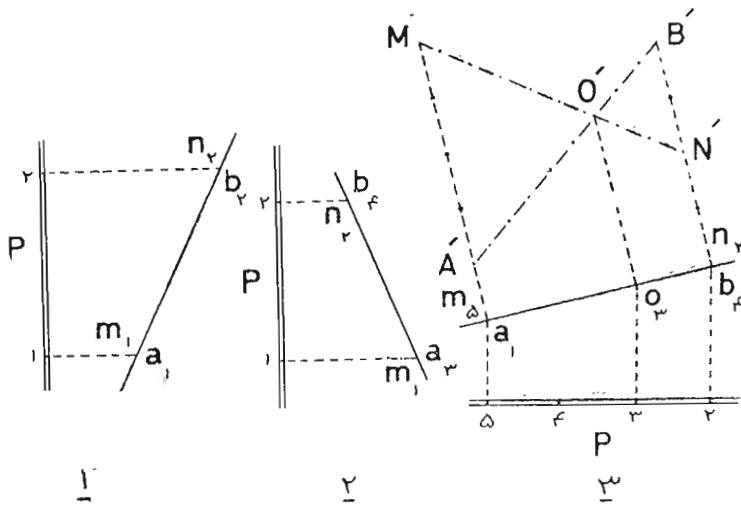
می‌نامیم . دو حالت ممکن است پیش آید :

حالت اول - رقوم m با رقوم a و رقوم n با رقوم b مساوی است (مثلاً رقومهای a و m ، ۱ و رقومهای b و n ، ۲ باشند)؛ در این صورت ، a_1b_1 که دو نقطه‌اش در صفحه P است ، در صفحه P واقع است (شکل ۱-۱۱) .

حالت دوم - رقومهای m و n با رقومهای a و b اختلاف دارند؛ در این حالت یا :

الف - فراز a_2b_2 با فراز m_2n_2 مساوی است و ترقی رقوم آنها هم در یک جهت است ، یعنی دو خط a_2b_2 و m_2n_2 متوازی‌اند ؛ پس خط a_2b_2 که با یکی از خطوط صفحه P موازی است با صفحه P موازی است (شکل ۲-۱۱) .

ب - فراز AB با فراز MN مساوی و جهت ترقی رقومشان مخالف یکدیگر است (شکل ۳-۱۱) ، یا اینکه فراز AB با فراز MN یکی نیست (شکل ۴-۱۱ و ۵) ؛ پس دو خط که تصویرهایشان بر روی هم قرار دارند متقاطعند بنا بر این AB صفحه P را قطع می‌کند . هرگاه صفحه مصور دو خط را تسطیح کنیم ، $A'B'$ و $M'N'$ ، تسطیحات دو خط ، یکدیگر را در O' قطع می‌کنند . O' ترفیع O را بدست می‌آوریم . چون این نقطه هم بر روی خط AB و هم بر روی صفحه P است ، نقطه تلاقی خط AB با صفحه P است که می‌توان رقوم آن را روی AB یا روی صفحه معین کرد . در شکل ۳-۱۱ ، خط a_1b_1 صفحه P را در نقطه o_3 قطع کرده است .



(ش ۱۱)

۱۱- مسئله - از نقطه a_3 واقع در صفحه P خطی در این صفحه رسم کنید که با صفحه مقایسه زاویه α تشکیل دهد .

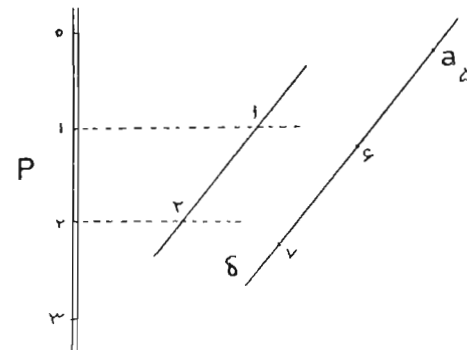
α است. در شکل ۱۳، بردایره دو مماس رسم شده است و مسئله دو جواب دارد.

بحث - شرط وجود جواب این است که رسم مماس بر دایره میسر باشد. برای این کار، باید فراز خط از فراز صفحه بزرگتر یعنی شیب از شیب صفحه کوچکتر باشد. درحقیقت هیچیک از خطهای صفحه نمی تواند با صفحه مقایسه زاویه ای بسازد که از زاویه صفحه با صفحه مقایسه بزرگتر باشد.

تمرین - خطی بدخواه رسم کنید که با صفحه افقی زاویه 30° بسازد و بر آن صفحه ای بگذرانید که شیب ۲ باشد. زاویه حقیقی این صفحه را با صفحه افق نمایش دهید.

اوضاع مختلف خط و صفحه

۱۳- موازی بودن خط و صفحه - شرط آنکه خطی با صفحه ای موازی باشد، این است که با یکی از خطهای صفحه موازی باشد.



(ش ۱۴)

مثال ۱ - خط δ بر نقطه a گذشته و با صفحه P موازی است و می خواهیم آن را مدرج کنیم:

در صفحه P خطی موازی با δ می کشیم و

فراز آن را بدست می آوریم و از مبدأ a به اندازه آن فراز بر روی خط δ جدا کرده خط را مدرج می کنیم بقسمی که ترقی رقوم دو خط مزبور در یک جهت باشد (شکل ۱۴).

مثال ۲ - می خواهیم از نقطه A خطی به شیب p و موازی با صفحه مفروض P رسم کنیم.

نخست در صفحه P خطی به شیب p (به فراز $\frac{1}{p}$) رسم می کنیم و از A خطی به موازات آن می کشیم.

۱۴- موازی بودن دو صفحه - برای اینکه دو صفحه متوازی باشند، باید دو خط متقاطع از یکی با دو خط متقاطع از صفحه دیگر، موازی باشند. مثلاً افقیهای آنها باهم و بزرگترین شیبهایشان نیز باهم موازی باشند؛ اما شرط اخیر، یعنی متوازی بودن بزرگترین شیبها، متوازی بودن افقیها را ایجاب می کند؛ پس:

شرط توازی دو صفحه این است که بزرگترین شیبهایشان متوازی باشند.

تمرین - از نقطه a صفحه ای به موازات صفحه P بگذرانید و در آن از a خطی به شیب $\frac{1}{3}$ رسم کنید.

۱۵ - عمود بودن خط و صفحه - قضیه - اگر خطی بر صفحه ای عمود باشد:

الف - تصویر خط با مقیاس شیب صفحه موازی می شود.

ب - فراز خط عکس فراز صفحه است.

ج - جهت ترقی رقوم روی تصویر خط و مقیاس شیب صفحه مخالف یکدیگر است .

برهان - الف - چون خط بر صفحه عمود است ، بر اثر آن نیز عمود است و تصویرش هم بر اثر صفحه عمود بوده و در نتیجه با مقیاس شیب صفحه موازی می شود .

ب - زاویه α که خط با صفحه مقایسه می سازد ، متمم β ، زاویه بین صفحه و صفحه مقایسه است ، یعنی $\alpha = 90^\circ - \beta$ ؛ پس :

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$

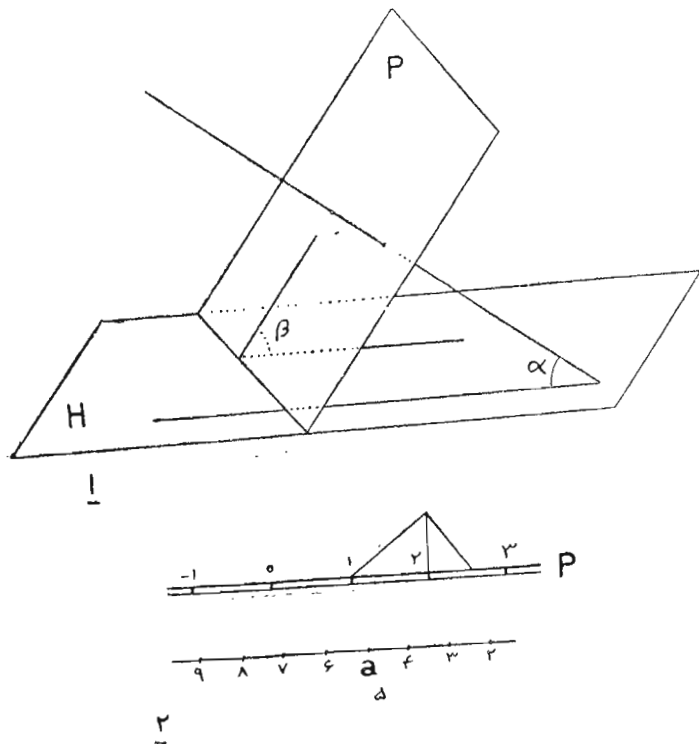
$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{cotg} \beta}$$

و

یعنی شیب و فراز خط ، بترتیب عکس شیب و فراز صفحه می باشند .
ج - اگر در روی مقیاس شیب ، ترقی رقوم از چپ به راست باشد ، روی تصویر خط ، ترقی رقوم از راست به چپ خواهد بود (شکل ۱۵-۱۶) .
۱۶ - بسهولت می توان ثابت کرد که بعکس اگر تصویر خطی با مقیاس شیب صفحه ای موازی ، فراز خط عکس فراز صفحه و جهت ترقی رقوم روی تصویر خط و مقیاس شیب صفحه مخالف یکدیگر باشد ، خط بر صفحه عمود است .

پس اگر بخواهیم از نقطه a_5 خطی بر صفحه P عمود کنیم (شکل ۱۵-۲) ، نخست عکس فراز صفحه را می سازیم ، آنگاه از a خطی موازی مقیاس شیب کشیده آن را از مبدا a_5 با فرازی مساوی عکس فراز صفحه و در جهت مخالف ترقی رقوم صفحه مدرج می کنیم .

همچنین اگر بخواهیم از نقطه ای يك صفحه بر خطی عمود کنیم ، مقیاس شیب را موازی تصویر آن خط می کشیم و فراز آن را مساوی



(ش ۱۵)

عکس فراز خط قرار داده و در جهت مخالف ترقی رقوم خط مدرج می کنیم .

۱۷ - شرط عمود بودن صفحه ای بر صفحه دیگر این است که يك خط یکی از آنها بر دیگری عمود باشد .

پس برای آنکه از نقطه ای صفحه ای به صفحه P عمود کنیم ، از آن نقطه خطی بر صفحه P عمود می کنیم ؛ هر صفحه که بر این خط بگذرد جواب مسئله است . مسئله جوابهای بیشمار دارد .

تمرین ۱- صفحه P و خط Δ مفروضند. بر خط Δ صفحه‌ای بگذرانید که بر صفحه P عمود باشد.

تمرین ۲- از نقطه مفروض A صفحه‌ای بگذرانید که با خط مفروض Δ موازی و بر صفحه مفروض P عمود باشد.

فصل مشترکها

۱۸- فصل مشترک دو صفحه خطی است مستقیم. نخست فصل مشترک يك صفحه را با صفحات خاص بدست می‌آوریم، سپس در حالت عمومی فصل مشترک دو صفحه را تعیین می‌کنیم.

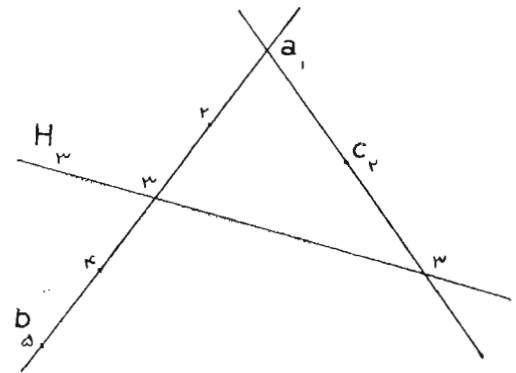
۱۹- فصل مشترک يك صفحه نا مشخص با يك صفحه افقی- در این حال، فصل مشترک، افقیه‌ای از صفحه است.

مثال ۱- فصل مشترک صفحه P با صفحه افقی رقوم ۵، افقیه رقوم ۵ صفحه P است.

مثال ۲- اگر صفحه با دو خط متقاطع نموده شده باشد (شکل ۱۶) و بخواهیم فصل مشترک

آن را مثلاً با صفحه افقی رقوم ۳ بدست آوریم، نقاط رقوم ۳ از دو خط مزبور را به هم وصل می‌کنیم؛ خط حاصل یعنی H_3 فصل مشترک مطلوب

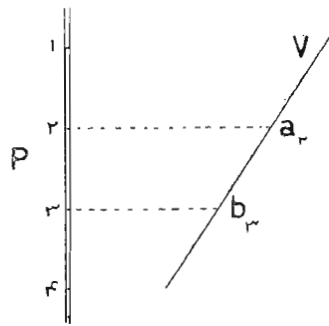
است.



(ش ۱۶)

۲۰- فصل مشترک يك صفحه با صفحه قائم - برای بدست آوردن فصل مشترک صفحه P با صفحه قائمی که V (شکل ۱۷) اثر

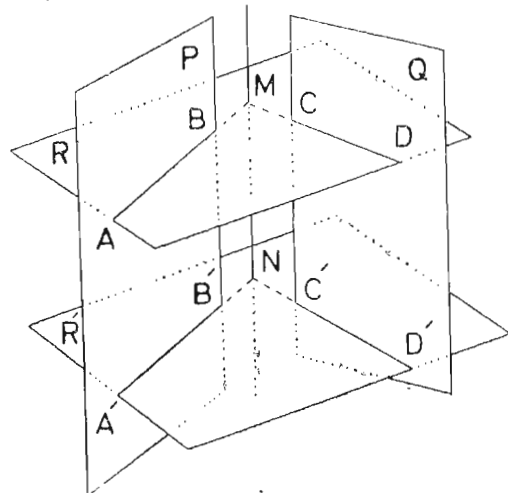
آن است، کافی است که V را خطی از صفحه P فرض کرده آن را مدرج کنیم؛ زیرا که تصویر فصل مشترک، بر V منطبق است. در شکل ۱۷، a_2b_2 فصل مشترک دو صفحه است.



(ش ۱۷)

۲۱- حالت عمومی - هرگاه

بخواهیم فصل مشترک دو صفحه P و Q (شکل ۱۸) را بدست آوریم، صفحه سومی مانند R ، به نام صفحه کمکی، چنان اختیار می‌کنیم که



(ش ۱۸)

هر دو صفحه را قطع کند و تعیین فصل مشترک صفحه R با آنها آسان باشد. این فصل مشترکها را تعیین می‌کنیم (AB و CD)؛ AB و CD یکدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کنند

که متعلق به دو صفحه P و Q است، یعنی روی فصل مشترک آنها واقع است. اگر صفحه کمکی دیگری مانند R' اختیار کنیم و به کمک آن نقطه دیگری مانند N از فصل مشترک دو صفحه را بدست آوریم، خط MN

فصل مشترك مطلوب است .

در هندسه رقومی صفحات کمکی معمولاً افقی انتخاب می‌شوند.

۲۲- مثال - می‌خواهیم فصل مشترك دو صفحه P و Q را تعیین

کنیم (شکل ۱۹) . صفحه افقی رقوم ۲ را کمکی اختیار می‌کنیم ؛

فصل مشترك این صفحه با صفحات P و Q افقیه‌های رقوم ۲ آنهاست ؛

این دو فصل مشترك یکدیگر را در نقطه m_2 که يك نقطه از فصل مشترك

دو صفحه P و Q

است قطع می‌کنند؛

همچنین صفحه افقی

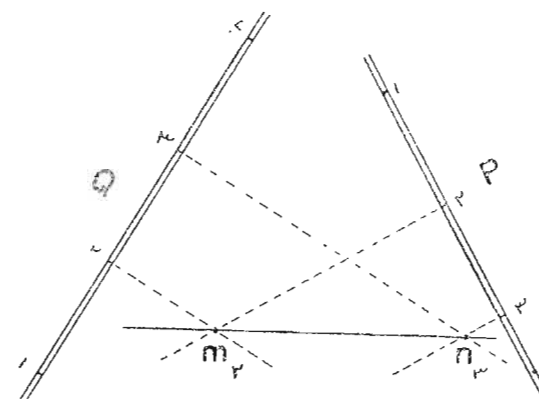
رقوم ۳ را كمك

می‌گیریم و نقطه n_3

را که يك نقطه

دیگر از فصل مشترك

دو صفحه است تعیین



(ش ۱۹)

می‌کنیم ؛ خط m_2n_3 فصل مشترك دو صفحه است .

هرگاه افقیه‌های متحدالرقوم یکدیگر را در خارج حدود شکل

قطع کنند ، ممکن است دو صفحه کمکی غیر افقی مانند R و S

(شکل ۲۰) اختیار کرده به كمك هريك از دو صفحه مذکور ، يك نقطه

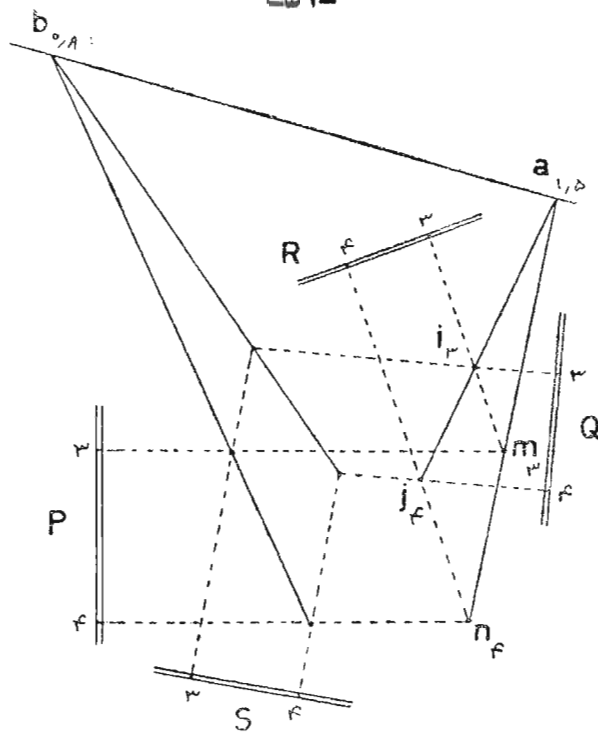
از فصل مشترك مطلوب را بدست آورد . در شکل ۲۰ افقیه‌های رقوم ۳

صفحات P و R یکدیگر را در m_2 و افقیه‌های رقوم ۴ آنها یکدیگر

را در n_4 قطع می‌کنند ؛ افقیه‌های مذکور از صفحه R افقیه‌های هم‌رقوم

خود از صفحه Q را بترتیب در i_3 و j_4 قطع می‌کنند ؛ دو خط m_2n_4

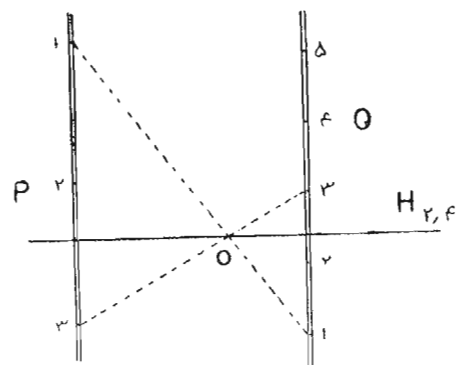
و i_3j_4 یکدیگر را در $a_{1/5}$ قطع می‌کنند ؛ پس $a_{1/5}$ يك نقطه از فصل



(ش ۲۰)

مشترك مطلوب است . به همین طریق نقطه $b_{0/8}$ را به كمك صفحه S

بدست می‌آوریم ؛ $b_{0/8}$ و $a_{1/5}$ فصل مشترك مطلوب است .



(ش ۲۱)

اگر مقیاس شیبه‌ای دو صفحه

متوازی باشند (شکل ۲۱) ،

چهار نقطه از آنها را که دو به دو

هم‌رقوم باشند ، به هم وصل

می‌کنیم تا یکدیگر را در o

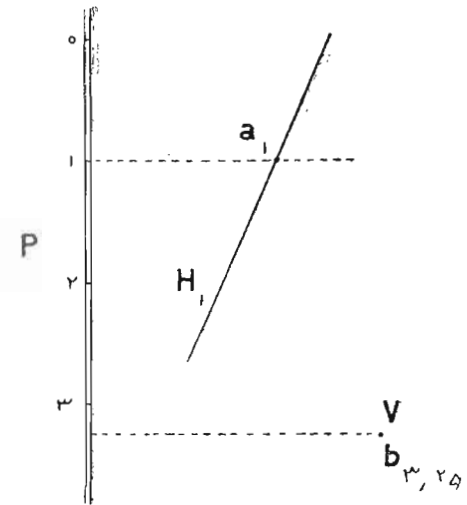
قطع کنند ؛ افقیه‌ای که بر o

بگذرد ، فصل مشترك دو صفحه

است؛ زیرا که : الف- می دانیم هرگاه بر دو خط متوازی دو صفحه متقاطع بگذرانیم، فصل مشترکشان با آن دو خط موازی است. نظر به اینکه افقیه های دو صفحه متوازیند، فصل مشترکشان هم افقیه می شود. ب- خطوط واصل بین انتهای قطعات متناسب (یا متساوی) از دو خط متوازی، از يك نقطه می گذرند (خطوط متقارب هندسه سال چهارم)؛ پس تصاویر افقیه هایی که نقاط هم رقوم دومقیاس شیب را به هم وصل کنند، از يك نقطه می گذرند و فصل مشترك دو صفحه هم که چنین افقیه ای است، از همان نقطه مرور می کند.

تمرین - سه نقطه a و b و c رؤس مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۶ هستند و رقومهای آنها بترتیب ۲ و ۲ و ۵ است؛ فصل مشترك صفحه $a_1b_1c_1$ را با صفحه ای که با مقیاس شیبش نمایش داده شده است، بدست آورید.

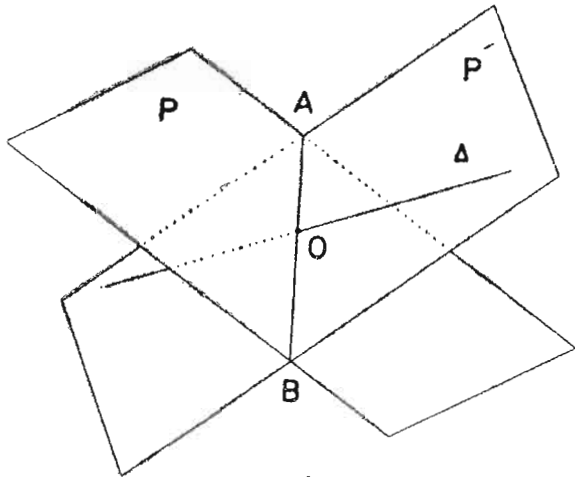
۲۳- فصل مشترك خط و صفحه- هرگاه خط، افقی یا قائم باشد، تعیین فصل مشترك بسیار ساده است. برای تعیین فصل مشترك يك خط افقی با يك صفحه، نقطه تلاقی آن افقیه را با افقیه هم رقومش از صفحه تعیین می کنیم. در شکل ۲۲، نقطه a_1 فصل مشترك افقیه H_1 با صفحه P است.



(ش ۲۲)

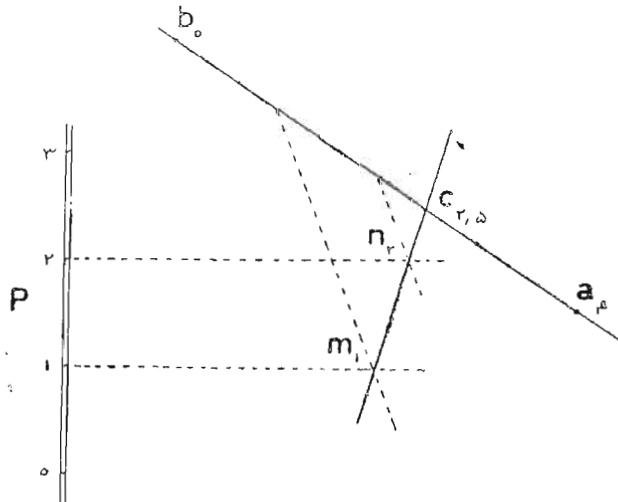
برای تعیین فصل مشترك يك خط قائم با يك صفحه، تصویر خط قائم را نقطه ای از صفحه فرض کرده و رقوم آن را بدست می آوریم. در شکل ۲۲، نقطه تلاقی قائم V با صفحه P ، نقطه b_1 است.

۲۴- حالت عمومی- برای آنکه فصل مشترك خط Δ را با صفحه P بدست آوریم (شکل ۲۳)، بر Δ يك صفحه دلخواه مانند P' می گذرانیم و خط AB فصل مشترك P' را با صفحه P تعیین می کنیم؛



(ش ۲۳)

AB و Δ که در صفحه P' هستند یکدیگر را در O تلاقی می کنند؛



(ش ۲۴)

O فصل مشترك خط Δ و صفحه P است .

مثلاً برای تعیین فصل مشترك خط a_4b_5 با صفحه P (شکل ۲۴)، بر خط مزبور يك صفحه كمکی (که امتداد افقیه هایش را بدلتخواه رسم می کنیم) می گذرانیم و m_1n_2 فصل مشترك دو صفحه را بدست می آوریم؛ هر جا a_4b_5 با فصل مشترك مذکور تلاقی کند ، همانجا محل برخورد خط و صفحه است . در شکل ۲۴، $c_2/5$ فصل مشترك خط و صفحه می باشد .

تمرین - از نقطه a_5 عمودی بر صفحه P فرود آورید و موقع عمود را معین کنید .

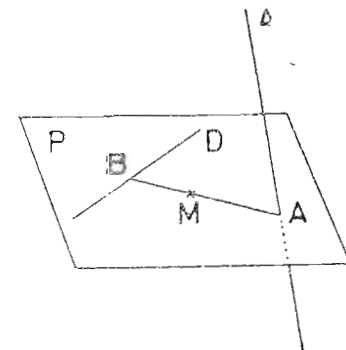
۲۵- مسئله - دو خط Δ و D و نقطه M داده شده اند . بر خطی M بگذرانید که آن دو خط را قطع کند - بر یکی از دو خط ، مثلاً D ، و نقطه M صفحه ای مرور می دهیم تا Δ را در A قطع کند؛ AM که با خط D در يك صفحه است ، آن را در B تلاقی می کند و AB خط مطلوب است (شکل ۲۵) .

هرگاه Δ و D متناظر باشند ،

مسئله يك جواب دارد و هرگاه Δ و D

مقاطع یا متوازی باشند ، اگر M در صفحه آنها باشد عدد جوابها بیشمار است ، یعنی هر خطی که در آن صفحه بر M بگذرد جواب مسئله است ، و اگر M در صفحه آنها نباشد ، مسئله

يك جواب دارد . وقتی که Δ و D متوازی باشند و M در صفحه آنها

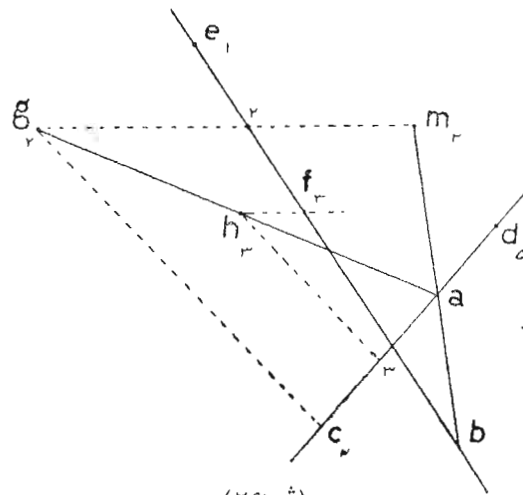


(ش ۲۵)

نباشد ، خط مطلوب با آنها موازی است .

ملخص - دو خط c_2d_5 و e_1f_3 و نقطه m_2 مفروضند (شکل ۲۶).

صفحه ای بر m_2 و e_1f_3 می گذرد ؛ برای تعیین نقطه تقاطع c_2d_5 با آن صفحه ، بر c_2d_5 صفحه ای گذرانده ایم و افقیه های رقوم ۲ و ۳ آن را



(ش ۲۶)

رسم کرده ایم تا افقیه های ۲ و ۳ صفحه m_2 و e_1f_3 را در g_3 و h_3 قطع کرده اند؛ g_3h_3 فصل مشترك دو صفحه است و c_2d_5 را در a قطع می کند؛ خط am جواب مسئله است و با e_1f_3 در b تلاقی می کند .

تمرین ۱- سه خط متناظر Δ' و Δ'' مفروضند . خطی رسم کنید

که هر سه را قطع کند و به دو جزء متساوی تقسیم شود .

راهنمایی - بر Δ صفحه ای موازی Δ' بگذرانید ؛ از يك نقطه

دلخواه Δ' به يك نقطه دلخواه Δ وصل کنید ؛ از وسط قطعه خطی که به این طریق بدست می آید ، صفحه ای به موازات آن صفحه مرور دهید تا Δ'' را در M قطع کند و خط مطلوب را از M بقسمی بگذرانید که Δ' و Δ را قطع کند .

تمرین ۳- سه خط متناظر Δ و Δ' و Δ'' و نقطه A داده شده اند .
متوازی الاضلاع $ABCD$ را چنان بسازید که مرکزش بر خط Δ و دو رأس B و D آن بر Δ' و Δ'' باشند .

راهنمایی- اول مرکز O و دو رأس مقابل B و D را با استفاده از تمرین قبل بدست می آوریم ؛ بعد از A به O وصل کرده C را تعیین می کنیم .

۲۶- مسئله - سه خط متناظر Δ و Δ' و Δ'' مفروضند ؛ خطی موازی Δ'' رسم کنید که Δ و Δ' را قطع کند .

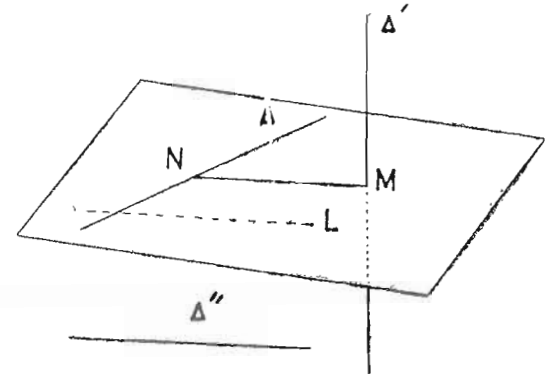
بر Δ صفحه ای به موازات Δ'' مرور می دهیم به این ترتیب که از يك نقطه خط Δ خط L را موازی Δ'' رسم می کنیم و بر Δ و L صفحه ای می گذرانیم ؛ این صفحه خط Δ' را در M قطع می کند . از M خط MN

را موازی Δ'' می کشیم

تا Δ را در N قطع کند ؛

MN خط مطلوب است

(شکل ۲۷) .



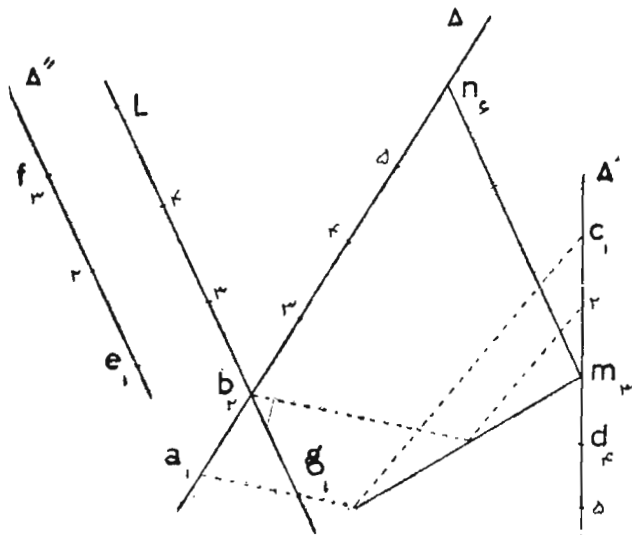
ملخص - سه خط

a_1b_2 و c_1d_2 و e_1f_2

داده شده اند (شکل

(ش ۲۷)

۲۸) ؛ از b_2 خط b_2g_1 را موازی e_1f_2 رسم کرده ایم و به این ترتیب بر AB صفحه ای موازی EF گذرانده ایم . این صفحه خط c_1d_2 را در m_2 قطع کرده است . (برای بدست آوردن m_2 از اقیه های ۱ و ۲ صفحه کمکی استفاده شده است) . از m_2 خطی موازی e_1f_2 کشیده ایم تا a_1b_2 را در n_2 تلاقی کرده است ؛ خط m_2n_2 جواب مسئله است .



(ش ۲۸)

تمرین - مسئله قبل را در حالتی که Δ غیر مشخص و Δ' افقی و Δ'' قائم باشد، حل کنید .

۲۷- مسئله - از نقطه مفروض A خطی موازی صفحه P رسم کنید تا خط Δ را قطع کند .

حل ۱- از A صفحه ای موازی P می گذرانیم تا Δ را در M قطع کند ؛ AM جواب مسئله است .

حل ۲- از A خطی موازی Δ رسم می کنیم ، فصل مشترک های آن خط و Δ را با صفحه P بدست می آوریم ، دو فصل مشترك را به هم وصل می کنیم ، و از A خطی موازی خط واصل می کشیم .

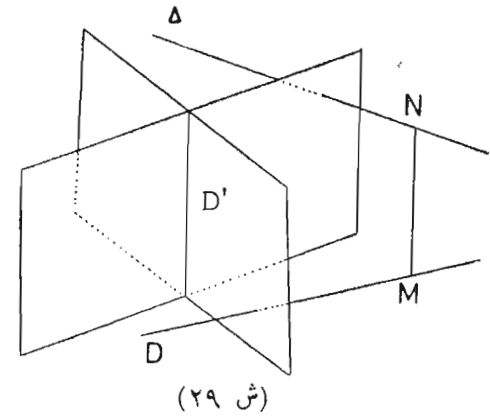
تمرین - مسئله ۲۷ را از هر دو راه رسم کنید .

۲۸- تعریف - عمود مشترك دو خط متناظر ، خطی است که آنها را قطع کند و بر هر دو عمود باشد .

۲۹ - مسئله - عمود مشترك دو خط متناظر Δ و D را رسم کنید .

راه اول - دو صفحه اختیاری بر Δ و D عمود می‌کنیم (شکل ۲۹) و D' فصل مشترك آنها را بدست می‌آوریم ؛ سپس خطی مانند MN به موازات D'

رسم می‌کنیم که Δ و D را قطع کند .



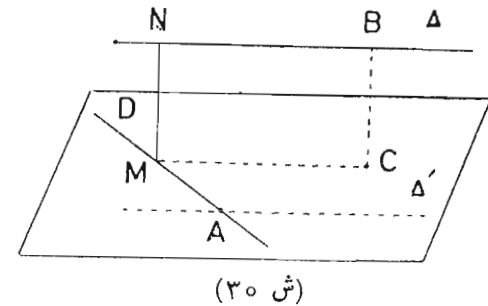
راه دوم - از

نقطه A واقع بر D خط Δ' را موازی Δ رسم می‌کنیم ؛ صفحه‌ای که بر D و Δ' می‌گذرد

با Δ موازی است ؛ از نقطه‌ای مانند B از خط Δ عمودی بر صفحه مذکور فرود آورده C موقع آن را بدست می‌آوریم ؛ از C خطی موازی Δ می‌کشیم تا D را در M قطع کند ؛ MN را موازی CB رسم می‌کنیم ؛ این خط عمود مشترك مطلوب است (شکل ۳۰) .

ملخص - دو

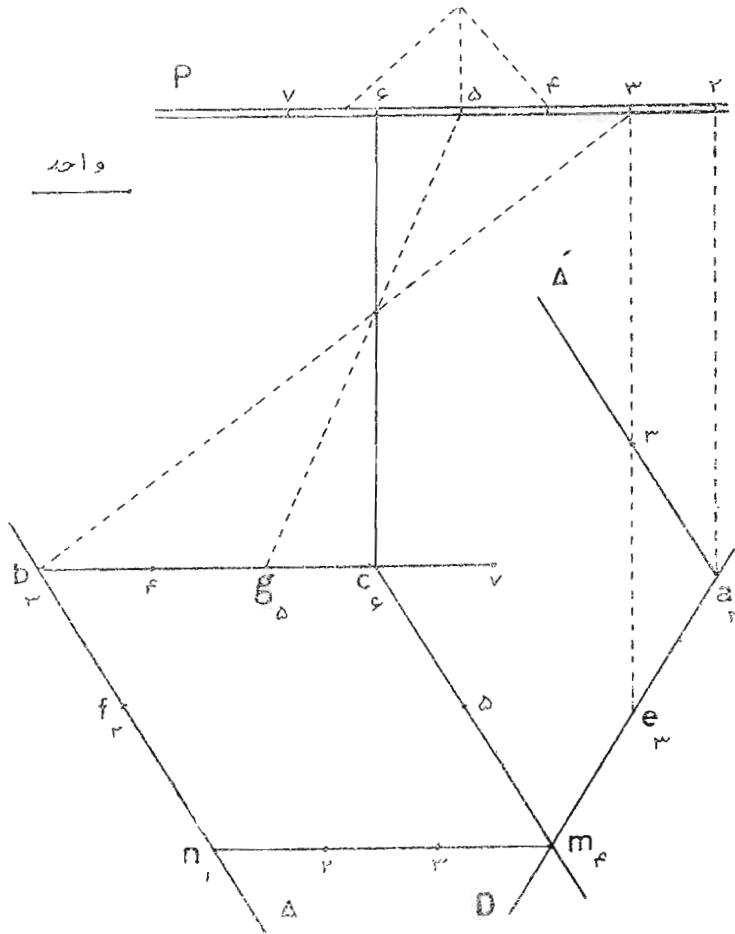
خط a_1e_3 یا D و b_3f_3 یا Δ داده شده اند (شکل ۳۱) . از a_1 خط Δ'



را موازی Δ کشیده‌ایم

و بر دو خط D و Δ' صفحه P را گذرانیده و فراز آن و عکس فراز آن را رسم کرده‌ایم ؛ از b_3 خط b_3g_5 را بر P عمود کرده و e_5 موقع عمود را

یافته‌ایم ؛ از e_5 خطی موازی b_3f_3 کشیده‌ایم تا D را در m_4 قطع کرده است ؛ از m_4 خطی موازی e_5b_3 کشیده‌ایم تا Δ را در n_1 تلاقی کرده است ؛ m_4n_1 ملخص عمود مشترك دو خط Δ و D است .



تمرین ۱ - خطهای D و Δ را مجدداً رسم کنید و عمود مشترك آنها را از راه اول بدست آورید .

تمرین ۲ - عمود مشترك دو خط را در حالتی خاص زیر رسم کنید :

الف - اولی قائم و دومی افقی باشد . ب - یکی قائم و دیگری غیر مشخص باشد . ج - یکی افقی و دیگری غیر مشخص باشد . د - هر دو قائم یا هر دو افقی باشند .

خلاصه مطالب مهم :

۱- صفحه با سه نقطه غیر واقع بر يك استقامت نمایش داده می شود ؛ یا با يك خط و يك نقطه خارج از آن ؛ یا با دو خط متقاطع ؛ یا با دو خط متوازی .

۲- برای مدرج کردن خطی از صفحه ، رقوم نقاط برخورد آن را با دو خط صفحه معین می کنیم .

۳- برای تعیین رقوم يك نقطه از صفحه که تصویرش داده شده باشد ، از آن نقطه خط دلخواهی در آن صفحه می گذرانیم و آن را مدرج می کنیم و رقوم نقطه را روی آن خط بدست می آوریم .

۴- افقیه های صفحه همه باهم موازی هستند .

۵- خط بزرگترین شیب صفحه عمود است برافقیه ها . این خط بتنهایی برای نمایش صفحه کافی است ؛ زیرا که امتداد افقیه ها را بدست می دهد و به مناسبت اهمیتی که این خط دارد ، تصویرمدرج آن را با دو خط متوازی نمایش می دهند و مقیاس شیب صفحه می خوانند .

۶- برای آنکه از نقطه مفروضی از يك صفحه خطی در آن صفحه رسم کنیم که شیب معینی داشته باشد ، فراز خط مطلوب را می سازیم و نقطه داده شده را مرکز قرار داده با شعاعی مساوی فراز خط مطلوب دایره ای می زنیم تا افقیه ای از صفحه را که اختلاف رقوم آن با رقوم نقطه مفروض ۱ باشد قطع کند ، از نقطه مفروض به نقطه تقاطع وصل می کنیم .

۷- برای آنکه برخطی صفحه ای به شیب معینی مرور دهیم ، به مرکز تصویر یکی از نقاط خط و با شعاعی مساوی فراز صفحه مطلوب ، دایره ای می زنیم و از تصویر نقطه ای از خط که رقومش از رقوم مرکز دایره يك واحد

بیشتر باشد ، مماسی بردایره رسم می کنیم ؛ این مماس افقیه مطلوب است .
۸- برای اینکه خطی با صفحه ای موازی باشد ، باید بایکی از خطهای آن موازی باشد .

۹- برای اینکه دو صفحه متوازی باشند ، باید دو خط متقاطع یکی با دو خط متقاطع دیگری موازی باشد ؛ یا کافی است مقیاس شیبهای دو صفحه متوازی باشند ؛ زیرا که افقیه های آنها نیز متوازی خواهند شد .

۱۰- اگر خطی برصفحه ای عمود باشد : الف - تصویرش بامقیاس شیب صفحه موازی است . ب- فرازش عکس فراز صفحه است . ج- ترقی رقومش درجهت مخالف ترقی رقوم مقیاس شیب صفحه است .

البته وقتی که خطی برصفحه ای عمود باشد ، صفحه نیز برخط عموداست .
۱۱- برای تعیین فصل مشترك دو صفحه ، دو افقیه هم رقوم آنها را رسم می کنیم تا از تقاطع آنها يك نقطه از فصل مشترك بدست آید ؛ نقطه دیگری از فصل مشترك را هم به وسیله رسم دو افقیه هم رقوم دیگر بدست می آوریم و فصل مشترك را رسم می کنیم .

اگر افقیه های دو صفحه یکدیگر را خیلی دور (یعنی خارج از حدود شکل) قطع کنند ، دو صفحه کمکی اختیار می کنیم و به کمک هر يك از آنها يك نقطه از فصل مشترك را بدست می آوریم .

اگر مقیاس شیب دو صفحه ، و در نتیجه افقیه های آنها ، متوازی باشند ، چهار نقطه دو بدو هم رقوم از دو مقیاس شیب را به هم وصل می کنیم تا یکدیگر را قطع کنند ؛ افقیه ای که از نقطه تقاطع ، عمود بر مقیاس شیبهای دو صفحه رسم شود ، فصل مشترك مطلوب است .

۱۲- برای تعیین فصل مشترك خط و صفحه ، برخط صفحه ای می گذرانیم و فصل مشترك آن را با صفحه مفروض پیدا می کنیم ؛ نقطه تقاطع فصل مشترك با خط مفروض ، نقطه تقاطع آن خط با صفحه است .

تمرین

۱- صفحه ای به وسیله سه نقطه a_1 ، b_1 و c_1 داده شده است . خطی از

صفحه را که تصویرش بوسط ab و بر نقطه ای از ac به فاصله $\frac{ac}{3}$ از a می گذرد مدرج کنید .

- ۲- در مثلث $a_1b_1c_1$ میانه‌ها را بکشید و آنها را مدرج کنید .
- ۳- رقوم نقطه تلاقی میانه‌های مثلث $m_1n_1p_1$ را بدست آورید و تحقیق کنید که مساوی $\frac{1}{3}$ مجموع رقومهای سه رأس مثلث است .
- ۴- مقیاس شیب صفحه مثلث $a_1b_1c_1$ را رسم کنید .
- ۵- اقلیه H_1 و نقطه a_1 داده شده اند. مثلث متساوی الساقینی بسازید که رأسش a_1 و قاعده اش روی H_1 و طول قاعده اش ۴ باشد .
- ۶- صفحه P را به شیب $\frac{1}{4}$ رسم کنید. در این صفحه نقطه a_1 را اختیار کنید و بر آن، دو خط، اولی به شیب $\frac{1}{3}$ و دومی به شیب $\frac{2}{5}$ مرور دهید .
- ۷- در مسئله ۶، مثلثی بسازید که رأسش a_1 باشد و دوزلع آن روی دو خطی باشند که رسم کرده اید و ضلع سومش خطی افقی به طول ۶ باشد .
- ۸- خط a_1b_1 را به شیب $\frac{1}{4}$ رسم کنید و بر آن صفحه‌ای بگذرانید که شیبش $\frac{1}{5}$ باشد .
- ۹- بر خط مفروض m_1n_1 صفحه‌ای بگذرانید که با صفحه مقایسه زاویه 75° بسازد .
- ۱۰- بر نقطه a_1 ، صفحه‌ای به شیب $\frac{1}{3}$ بگذرانید بقسمی که اقلیه‌هایش با امتداد مفروضی موازی باشند .
- ۱۱- بر نقطه b_1 صفحه‌ای بگذرانید که با صفحه مقایسه زاویه 45° بسازد و اثر آن با امتداد معلومی زاویه α تشکیل دهد .
- ۱۲- در صفحه P خط a_1b_1 را به شیب $\frac{1}{4}$ رسم کنید . بعد بر نقطه مفروض m_1 واقع در خارج صفحه P صفحه‌ای مرور دهید که فصل مشترکش با P خط a_1b_1 باشد ؛ آیا می‌توانید زاویه این صفحه را با صفحه مقایسه بدست آورید ؟
- ۱۳- سه نقطه a_1 و b_1 و دو نقطه d و e تصاویر دو نقطه از صفحه ABC داده شده‌اند. رقوم d و e را پیدا کنید (a ، b ، c ، d و e يك پنج ضلعی تشکیل می‌دهند) .

- ۱۴- سه نقطه a_1 و b_1 و c_1 با نقطه d چهار رأس يك چهار ضلعی هستند . قطر bd را مدرج کنید .
- ۱۵- فصل مشترك دو صفحه را در این حالتها بدست آورید :
الف- یکی قائم و دیگری با سه نقطه مشخص شده باشد .
ب- یکی افقی و دیگری با مقیاس شیب معین شده باشد .
ج- هر دو با مقیاس شیب نمایش داده شده باشند .
د- هر دو با سه نقطه مشخص شده باشند .
- ۱۶- فصل مشترك خط و صفحه را در این حالتها بدست آورید :
الف- خط قائم و صفحه افقی باشد .
ب- خط قائم و صفحه با سه نقطه مشخص شده باشد .
ج- خط افقی و صفحه با مقیاس شیب داده شده باشد .
د- خط غیر مشخص و صفحه قائم باشد .
ه- خط و صفحه هر دو غیر مشخص باشند .
- ۱۷- دو خط a_1b_1 و c_1d_1 داده شده‌اند. بر صفحه‌ای موازی a_1b_1 بگذرانید .
- ۱۸- از نقطه m_1 صفحه‌ای موازی دو خط a_1b_1 و c_1d_1 بگذرانید .
- ۱۹- نقطه A و خط D و صفحه P داده شده‌اند. از A خطی رسم کنید که موازی صفحه P باشد و خط D را قطع کند .
- ۲۰- اقلیه‌ای رسم کنید که دو خط متناظر را قطع کند و تصویرش با امتداد معلومی از صفحه مقایسه زاویه معین α بسازد .

فصل چهارم

تسطیح

۱- بطوری که در آغاز کتاب گفتیم ، هدف هندسه رقومی و هندسه ترسیمی، نمایش اشکال است بقسمی که از روی تصاویر آنها به اندازه حقیقی ابعاد و اجزای مختلفشان بتوان پی برد . این کار در صورتی میسر است که صفحه شکل با صفحه تصویر موازی باشد . اگر صفحه شکل موازی با صفحه مقایسه نباشد ، ممکن است آن را در حول محوری آنقدر دوران دهیم تا با صفحه تصویر موازی شود .

بطوری که می دانید وقتی که جسمی دوران کند (مانند دری که در حول لولاهای خود باز و بسته می شود) ، خط مستقیمی که جسم در حول آن دوران می کند و محور دوران نام دارد ، تغییر نمی کند ؛ یعنی نقاطی که بر آن قرار دارند ثابت می مانند ؛ اما هر نقطه دیگر در روی صفحه ای عمود بر محور ، قوسی از دایره ، مساوی زاویه دوران طی می کند ، و زاویه دوران برای تمام نقاط جسم یکی است .

۲- در هندسه رقومی هرگاه صفحه شکلی را در حول محوری آنقدر دوران دهیم تا با صفحه مقایسه موازی شود ، می گوئیم آن را **تسطیح**

کرده ایم . وقتی که صفحه پس از تسطیح موازی صفحه مقایسه شود ، همه خطوط آن ، از جمله محور ، افقی خواهند شد ؛ چون محور دوران ثابت و تغییر ناپذیر است ، باید پیش از دوران هم افقی باشد . بنابراین **محور تسطیح همیشه یکی از افقیه های صفحه شکل اختیار می شود .**

۳- مقصود از تسطیح يك صفحه ، دوران دادن آن است در حول یکی از افقیه هایش تا با صفحه مقایسه موازی ، یا بر آن منطبق شود . محور دوران را **لولا** می نامیم . هرگاه صفحه ای را در حول لولایی افقی به ارتفاع h تسطیح کنیم ، می گوئیم که آن صفحه را بر صفحه افقی به ارتفاع h تسطیح کرده ایم ؛ هرگاه لولا اثر افقی صفحه باشد ، صفحه بر صفحه مقایسه تسطیح می شود .

۴- **تسطیح صفحه به موازات صفحه مقایسه** - فرض می کنیم که صفحه P را در حول لولای افقی AB تسطیح کرده به وضع P' که موازی با صفحه مقایسه H است ، در آورده باشیم (شکل ۱) . هر نقطه مانند M از صفحه P در روی دایره ای که صفحه اش بر لولا عمود است و لولا را در I قطع می کند و مرکز I و شعاعش مساوی با فاصله I از M است دوران می کند و به وضع M' تسطیح می شود . اگر m تصویر افقی M و m' تصویر افقی M' باشد ، m' را تسطیح نقطه m می گوئیم .

حال بینیم m' چطور بدست می آید :

الف - اگر ab تصویر لولای افقی AB و i تصویر I باشد ، ab موازی است با AB و mi عمود است بر ab (\widehat{mia} تصویر زاویه قائمه ای است که يك ضلعش با صفحه تصویر موازی است) ؛ بدلیل مشابه ، im'

(شکل ۱) و طولی مساوی اختلاف رقوم نقطه و لولا بر آن جدا می کنیم تا نقطه α بدست آید و از i به α وصل می کنیم؛ مثلث $im\alpha$ مساوی مثلث IKM است و اگر به مرکز i و شعاع ia دایره ای روی صفحه مقایسه رسم کنیم بر m' می گذرد.

(ش ۱)

است که يك ضلعش KM ، مساوی اختلاف رقوم نقطه و لولاست و ضلع دیگرش $IK = im$ ، یعنی مساوی فاصلهٔ تصویر نقطه است از تصویر لولا؛ پس فاصلهٔ تسطیح هر نقطه از تصویر لولا مساوی وتر مثلث قائم-الزاویه‌ای است که يك ضلعش مساوی فاصلهٔ تصویر نقطه از تصویر لولا و ضلع دیگرش مساوی اختلاف رقوم نقطه و لولا باشد.

بنا بر این هرجا مثلثی با این شرایط بسازیم، وترش مساوی im' خواهد بود. مناسب‌ترین جا برای ساختن مثلث، صفحه‌ی مقایسه است؛ به این ترتیب که از m ، تصویر نقطه، خطی موازی تصویر لولا می‌کشیم

مثلاً α را مثلث تسطیح و زاویه α را زاویه تسطیح و قاعده‌ای را که گفته شد، قاعده مثلث قائم الزویه می‌گوییم. زاویه تسطیح مساوی است با مسطحه فرجه بین صفحه شکل و صفحه مقاسه.

۵- باتوجه به شکل ۱ این

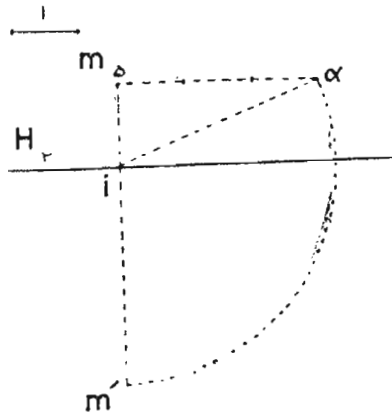
نکات را بخاطر بسپارید : (ش ۲)

الف - بر حسب جهتی که برای دوران قائل شویم، M را می توان در هر يك از دو طرف لولا تسطیح کرد .

ب- تسطیح نقاطی که بر روی لولا باشند، بر خود آنها منطبق است.

ج- تمام شکل‌هایی که نسبت به l در یک نیمه صفحه P هستند،

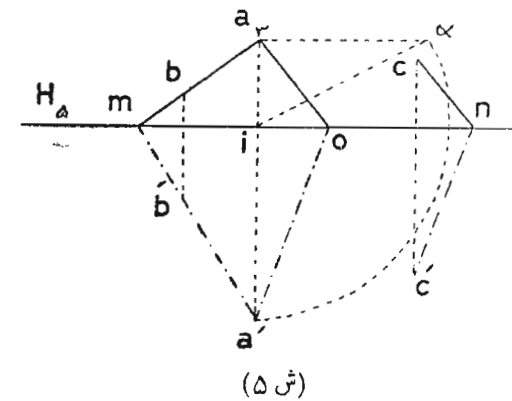
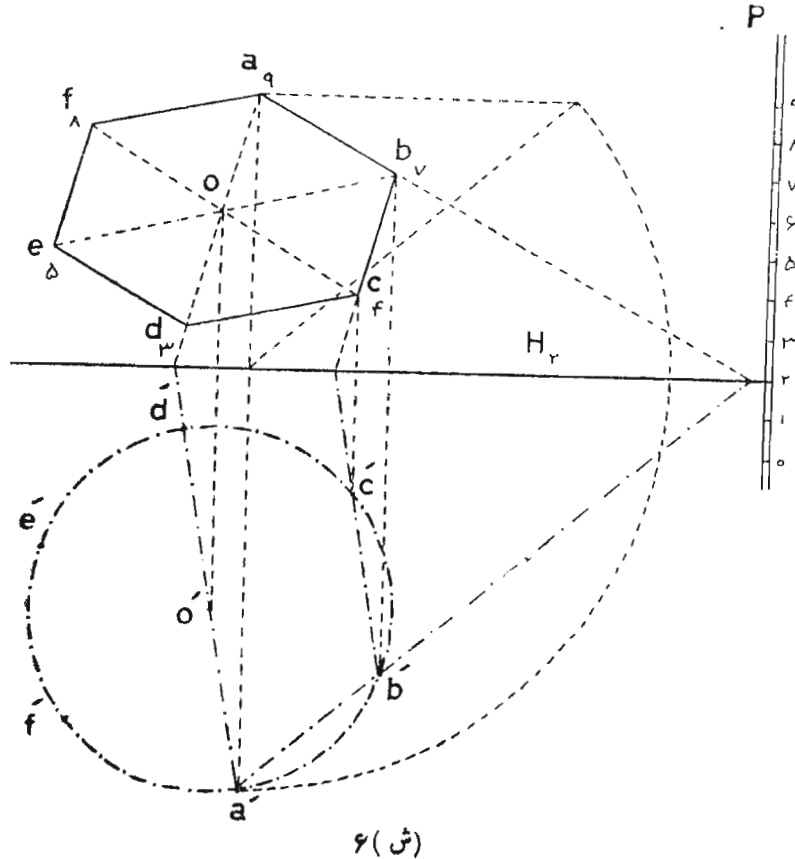
در يك طرف لولا تسطیح می شوند و کلیه شکلهای واقع در نیمه دیگر،



تمرین ۲- اقصیه H_p و a' تسطیح نقطه‌ای از صفحه P داده شده‌اند؛ صفحه P با صفحه افقی تصویر زاویه 60° می‌سازد؛ ترفیع a' و رقوم آن را بدست آورید.

۸- مثال - خط افقی H_2 و نقطه a_1 و نقطه o که در صفحه a_1H_2 است داده شده‌اند. a_1 رأس و o مرکز شش ضلعی منتظمی است که در صفحه a_1H_2 قرار دارد؛ می‌خواهیم شش ضلعی را بسازیم.

a_1 را در حول لولای H_2 به کمک مثلث قائم‌الزاویه در o' و a' را به کمک a_1 در o' تسطیح می‌کنیم (شکل ۶). به مرکز o' و شعاع $a'o'$



می‌کنیم. در شکل ۵ اگر b تسطیح نقطه‌ای باشد و بخواهیم آن را ترفیع کنیم، از b به a' (تسطیح نقطه a) وصل کرده امتداد می‌دهیم تا لولارا در m قطع کند. نقطه تقاطع ma با عمودی که از b بر لولا فرود آید ترفیع b است که آن را b می‌نامیم. هرگاه بخواهیم نقطه دیگری مانند c را ترفیع کنیم و خط $a'c$ لولا را در خارج از حدود شکل قطع کند، c را به کمک یک خط ترفیع می‌کنیم، یعنی از a' خطی می‌کشیم تا لولا را در o قطع کند و از o به a وصل می‌کنیم و از c موازی ao می‌کشیم تا لولا را در n تلاقی کند و از n خطی موازی ao رسم می‌کنیم تا عمودی را که از c بر لولا فرود آمده است در c قطع کند؛ c ترفیع c است (شکل ۵).

تمرین ۱- لولای H_0 و a تصویر يك نقطه و a' تسطیح آن در حول H_0 داده شده اند. رقوم نقطه A را بدست آورید.

۱- توجه داشته باشید که رقوم نقطه **b** داده نشده است؛ زیرا که چون نقطه **b** در صفحه مار بر a_p و H واقع است، رقوم آن را بدیخواه نمی توان اختیار کرد بلکه باید آن را در صفحه مذکور بدست آورد. ولی چون از رقوم نقطه **b** برای تسلیم آن استفاده نمی شود، بدست آوردن آن ضرورتی ندارد.

دایره‌ای رسم می‌کنیم و ابتدا از a' شش قوس متوالی که طول وتر آنها مساوی $a'a'$ باشد رسم می‌کنیم تا نقاط b', c', d', e', f' بدست آیند. b' و c' را در b و c ترفیع می‌کنیم. ao و bo و co را به اندازه خودشان امتداد می‌دهیم تا بترتیب نقاط d و e و f بدست آیند. رقوم رئوس شکل را به کمک افقیه‌های صفحه H_p و a_p بدست می‌آوریم.

تمرین ۳- o_p مرکز و a_p يك رأس مثلث متساوی الاضلاعی است که امتداد افقیه‌های صفحه‌اش با تصویر $a_p o_p$ زاویه 35° می‌سازد. مثلث را بسازید.

خلاصه مطالب مهم:

۱- برای تعیین طولها و زاویه‌های حقیقی يك شکل مستوی صفحه آن را به موازات صفحه مقایسه یا بر صفحه مقایسه تسطیح می‌کنیم.
۲- تسطیح کردن يك صفحه یعنی آن صفحه را در حول يك لولای افقی دوران دهند تا با صفحه مقایسه موازی شود. زاویه دوران را زاویه تسطیح گویند.
۳- اگر رقوم لولای دوران صفر باشد، صفحه بر صفحه مقایسه تسطیح می‌شود و در غیر این صورت به موازات آن تسطیح خواهد شد.
۴- تسطیح هر نقطه واقع است بر عمودی که از تصویر آن بر تصویر لولا فرود آید و فاصله تسطیح از لولا مساوی وتر مثلث قائم الزاویه‌ای است که يك ضلعش مساوی فاصله تصویر نقطه از تصویر لولا و ضلع دیگرش مساوی اختلاف رقوم نقطه و لولا باشد.

۵- برای تسطیح هر نقطه مانند M ، از m ، تصویر آن، خطی بر تصویر لولا عمود می‌کنیم تا آن را در i قطع کند و از m خطی موازی لولا می‌کشیم و بر روی آن طول ma را مساوی اختلاف رقوم نقطه M و لولا جدا می‌کنیم و به مرکز i و شعاع ia قوسی می‌زنیم تا عمود مزبور را در m' قطع کند؛ m' تسطیح M است.

۶- فقط يك نقطه صفحه‌ای را به قاعده مثلث قائم الزاویه تسطیح می‌کنیم؛ نقاط دیگر صفحه به کمک آن نقطه یا با استفاده از خطهای کمکی تسطیح می‌شوند.

۷- ترفیع، عکس عمل تسطیح است و مانند تسطیح، همه نقاط صفحه به کمک نقطه‌ای که ترفیعش در دست باشد، ترفیع می‌شوند.

تمرین

۴- نقطه a_p را در حول افقیه‌های به رقوم صفر و سه تسطیح کنید.
۵- نقطه a بدون رقوم و تسطیح آن a' در حول لولای رقوم صفر معلومند؛ رقوم نقطه را تعیین کنید.

۶- نقطه a بدون رقوم و تسطیح آن a' در حول لولای غیر معلومی در دستند. مطلوب است تعیین لولا در صورتی که زاویه تسطیح 60° درجه باشد.

۷- تصویر رقوم دار و تسطیح يك نقطه در حول لولای مجهول، معلومند؛ مطلوب است لولا در صورتی که رقومش در دست باشد.

۸- خط Δ و نقطه a' تسطیح يك نقطه در حول این لولا معلومند؛ تصویر نقطه را تعیین کنید بنا بر آنکه رقوم نقطه ۲- باشد.

۹- دو نقطه بدون رقوم a و b و اثر افقی صفحه‌ای که شامل آنهاست معلومند؛ مطلوب است رقوم نقاط، در صورتی که فاصله حقیقی این دو نقطه برابر طول معلوم l باشد (بحث).

۱۰- از نقطه a_p در صفحه مفروض P خطی به شیب $\frac{1}{2}$ رسم کرده اثر افقی این خط را تعیین کنید؛ اگر فرض کنیم که این اثر c باشد، مطلوب است رسم مربعی در صفحه P که خط $a_p c$ قطر آن باشد.

۱۱- خط Δ و نقطه a_p مفروضند؛ مطلوب است رسم مثلث متساوی - الاضلاعی که يك رأسش a_p و دو رأس دیگرش بر خط Δ واقع باشند.

۱۲- خط $a_p b_p$ و نقطه c_p مفروضند؛ بر خط نقطه‌ای تعیین کنید که فاصله‌اش از c_p برابر طول معلوم l باشد (بحث).

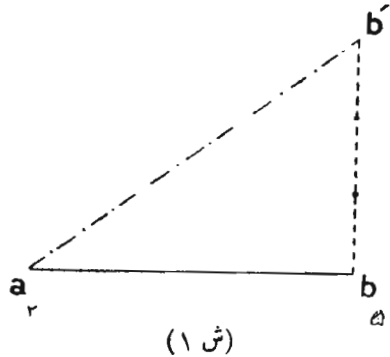
۱۳- خط Δ اثر صفحه P و نقاط a' و b' تسطیح دو نقطه از این صفحه در حول Δ معلومند؛ این نقاط را ترفیع کنید، بنا بر آنکه ab موازی امتداد معلومی باشد.

فصل پنجم

موارد استعمال^۱

I - فواصل

۱- فاصله دو نقطه - برای تعیین فاصله دو نقطه مانند a_4 و b_5 ،



بطوری که می‌دانید، صفحه مصور
خط a_4b_5 را در حول اثر افقی
بر صفحه مقایسه یا در حول افقیه
دیگری به موازات صفحه مقایسه
تسطیح می‌کنیم و فاصله دو نقطه
را بدست می‌آوریم.

در شکل ۱، صفحه مصور، در حول افقیه‌ای که بر a_4 می‌گذرد،
تسطیح شده است.

۲- فاصله نقطه از خط - برای تعیین فاصله نقطه a_4 از خط

b_5c_5 ، صفحه $a_4b_5c_5$ را در حول لولای افقی H_4 تسطیح می‌کنیم و فاصله
تسطیح نقطه را از تسطیح خط بدست می‌آوریم.

۱- تعلیم مسائلی که در این فصل با علامت * مشخص شده‌اند، اختیاری

است.

-۷۲-

۱۴- خط Δ اثر افقی صفحه P و نقاط a' و b' تسطیح دو نقطه از همین
صفحه در حول Δ معلومند؛ مطلوب است ab در صورتی که اختلاف ارتفاع
 A و B برابر l باشد (بحث).

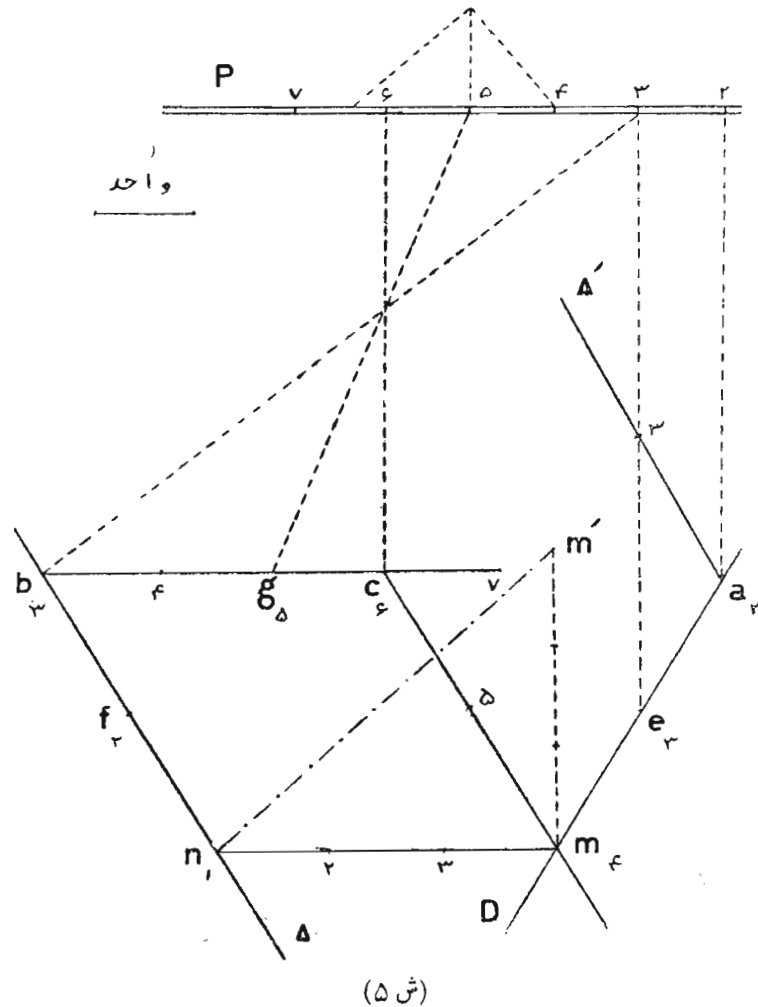
۱۵- نقطه a_1 و خط b_4c_4 مفروضند؛ مطلوب است رسم مثلث متساوی-
الاضلاعی که یک ضلعش بر خط مذکور واقع باشد و یک رأسش a_1 باشد.

۱۶- نقطه o_6 و خط a_4d_4 مفروضند؛ مطلوب است رسم مربعی که
نقطه O مرکز و خط a_4d_4 امتداد یکی از اضلاع آن باشد.

۱۷- نقاط a_5 و c_5 و نقطه بی‌رقوم b تصاویر سه رأس از یک لوزیند؛
رأس چهارم آن را تعیین کنید.

صفحه P رسم کرده موقع عمود ، نقطه o_p ، را بدست آورده ایم و طول قطعه خط $a_p o_p$ را به وسیله تسطیح صفحه مصور خط در حول افقیه رقوم ۴ تعیین کرده ایم .

۴- فاصله دو خط متناظر - فاصله دو خط متناظر طول عمود مشترك آنهاست ؛ در شکل ۵ قطعه خط $m_p n_p$ ، عمود مشترك دو خط متناظر $a_p e_p$ و $b_p f_p$ را ، طبق قاعده ای که در شماره ۲۹ فصل سوم گفته



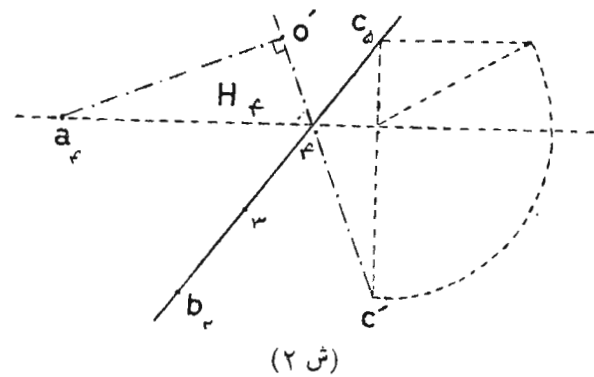
در شکل ۲ ،

تسطیح نقطه a_p

بر خود آن واقع

است و ao' فاصله

مطلوب است .



حالت مخصوص - چون فاصله نقطه

از خط ، طول عمودی است که از نقطه بر خط

فرود آید و به آن محدود شود ، وقتی که

(ش ۳)

خط قائم باشد (شکل ۳) ، عمود بر آن خطی افقی خواهد شد و در نتیجه

تصویرش به مقدار حقیقی خواهد بود . در شکل ۳ ، فاصله نقطه a_p از

خط قائم V ، طول

$a_p V$ است .

۳- فاصله نقطه

از صفحه - فاصله

نقطه از صفحه ، طول

عمودی است که از

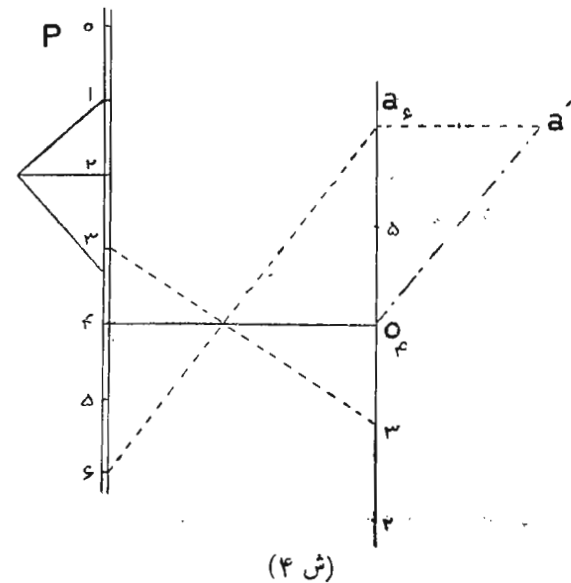
آن نقطه بر صفحه

فرود آید و به صفحه

محدود شود .

در شکل ۴ ، از

نقطه a_p عمودی بر



شد، بدست آورده ایم و صفحه مصور $m \neq n_1$ را درحول افقیه ای که بر نقطه n_1 می گذرد تسطیح کرده ایم؛ nm' ، تسطیح خط $m \neq n_1$ ، فاصله حقیقی دو خط متنافر $a_p e_p$ و $b_p f_p$ است.

۵- فاصله خط از صفحه یا فاصله دو صفحه از یکدیگر، فقط وقتی مورد پیدا می کند که خط با صفحه موازی باشد یا دو صفحه متوازی باشند. دراین صورت کافی است که فاصله يك نقطه خط را از صفحه یا فاصله يك نقطه واقع دريك صفحه را از صفحه دیگر یافت.

تمرین

- ۱- برخط $a_p b_p$ نقطه ای بیابید که فاصله اش از نقطه o_p مساوی ۳ باشد.
- ۲- نقطه رقوم دار a_p و b تصویری رقوم نقطه B و فاصله حقیقی AB داده شده اند؛ رقوم b را بدست آورید.
- ۳- برخط قائم V نقطه ای تعیین کنید که از نقطه مفروض a_p به فاصله ۵ باشد. مسئله چه وقت جواب دارد؟
- ۴- دو خط متوازی Δ و D و صفحه P داده شده اند؛ مطلوب است تعیین نقاطی از صفحه P که از دو خط Δ و D به يك فاصله باشند.
- ۵- نظیر تمرین ۴ وقتی که دو خط Δ و D متقاطع باشند.
- ۶- دو خط متوازی Δ و D و صفحه P داده شده اند؛ در صفحه P نقطه ای بدست آورید که از دو خط به فاصله ۱ باشد.

۷- دو خط متنافر Δ و D داده شده اند؛ کوچکترین مربعی را بسازید که مرکزش روی Δ و يك ضلعش روی D باشد.

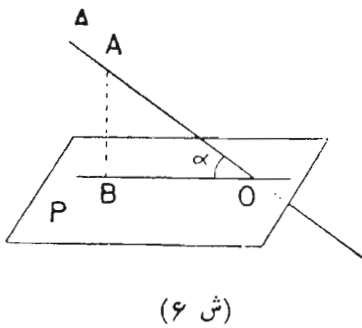
II - زوایا

۶- زاویه بین دو خط - برای تعیین زاویه بین دو خط متقاطع، صفحه آنها را تسطیح می کنیم و زاویه بین تسطیح دو خط را اندازه می گیریم. زاویه بین دو خط متنافر مساوی زاویه بین دو خط متقاطعی است که با دو خط مذکور موازی رسم شوند.

تمرین ۱- نیمساز زاویه بین دو خط $a_p b_p$ و $a_p c_p$ را رسم کنید.
تمرین ۲- در صفحه ای که برخط Δ و نقطه A می گذرد، از A خطی رسم کنید که با Δ زاویه α بسازد (تعداد جوابها؟).

۷- زاویه خط و صفحه - زاویه بین خط Δ و صفحه P عبارت است از زاویه حاده بین خط و تصویرش بر آن صفحه. این زاویه را میل خط نسبت به صفحه می گویند (شکل ۶).

برای تعیین زاویه بین خط و صفحه به دو طریق می توان عمل کرد:

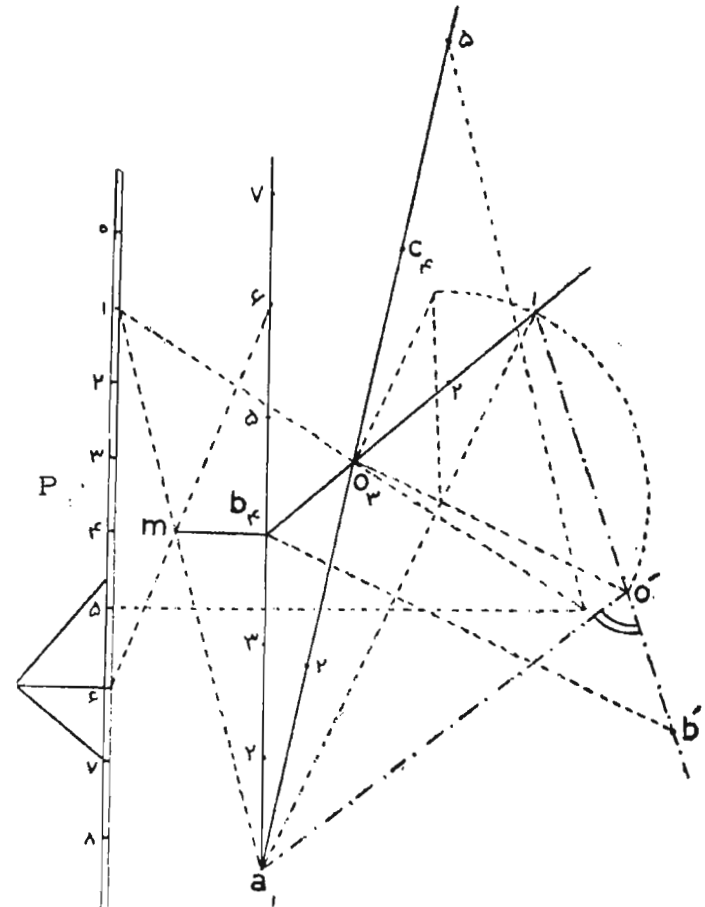


الف - اگر فقط مقصود، دانستن اندازه زاویه بین خط و صفحه باشد، از يك نقطه A واقع برخط، عمودی بر صفحه فرود می آوریم و زاویه بین عمود و خط را اندازه می گیریم؛ متمم این زاویه، زاویه بین خط و صفحه است.

ب - هرگاه مقصود، نمایش زاویه بین خط و صفحه باشد، فصل

مشترك خط و صفحه، و B تصویر يك نقطه مانند A از خط را روی صفحه بدست می آوریم؛ زاویه AOB زاویه بین خط و صفحه است.

ملخص - برای بدست آوردن زاویه بین خط a_1c_1 و صفحه P (شکل ۷)، از a_1 عمودی بر صفحه فرود آورده پای عمود، نقطه b_1 ، را بدست آورده ایم.



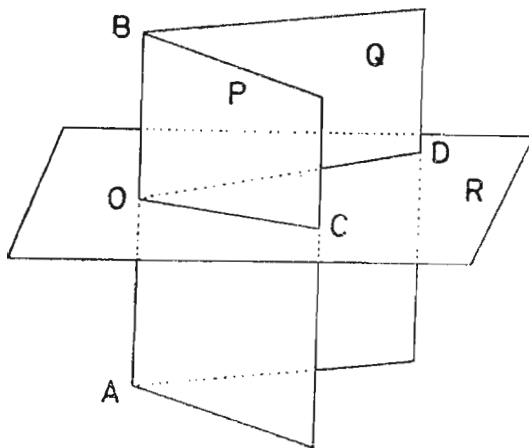
(ش ۷)

نقطه o_1 ، فصل مشترك AC و صفحه P ، به وسیله صفحه کمکی که امتداد افقیه هایش am است، معین شده است. \widehat{AOB} را در حول افقیه رقوم ۱ تسطیح کرده اندازه زاویه $a_1o_1b_1$ را بدست آورده ایم.

حالت خاص - زاویه خط با صفحه مقایسه - صفحه مصور خط را تسطیح می کنیم و زاویه بین تسطیح و تصویر خط، یعنی میل خط، را اندازه می گیریم.

۸- زاویه بین دو صفحه - زاویه دو صفحه، عبارت است از مسطحه فرجه بین آنها، یعنی زاویه ای که اضلاعش بر فصل مشترك دو صفحه عمود باشند و هر ضلعش در یکی از آن دو صفحه باشد.

برای تعیین زاویه بین دو صفحه P و Q ، از يك نقطه اختیاری O واقع بر فصل مشترك دو صفحه، صفحه R را بر فصل مشترك عمود می کنیم تا Q و P را در OC و OD قطع کند (شکل ۸)؛ زاویه COD مسطحه فرجه دو صفحه، یعنی زاویه مطلوب است.

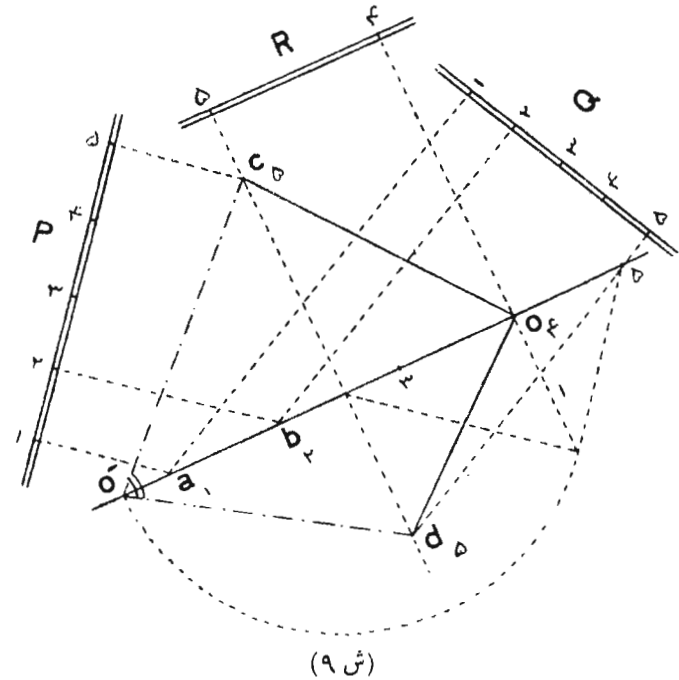


(ش ۸)

تبصره - هر گاه مقصود، فقط بدست آوردن اندازه مسطحه فرجه دو صفحه باشد، نه نمایش خود آن، راه آسانتری هست؛ بدین قرار که از يك نقطه اختیاری O دو عمود OM و ON را بر دو

صفحه فرود می آوریم؛ زاویه MON مکمل فرجه دو صفحه است؛ پس زاویه بین دو خط را یافته و مکمل آن را اندازه می گیریم تا مقدار مسطحه فرجه دو صفحه بدست آید.

ملاحظه - a_1b_1 فصل مشترك دو صفحه P و Q را بدست آورده ایم (شکل ۹)؛ از نقطه o_4 واقع بر a_1b_1 ، صفحه R را بر آن عمود کرده



(ش ۹)

o_4c_5 و o_4d_5 فصل مشتركهای R را با صفحات P و Q تعیین کرده ایم؛ آنگاه زاویه $c_5o_4d_5$ را در حول لولای افقی رقوم δ در صفحه R تسطیح کرده اندازه حقیقی آن را مشخص ساخته ایم.

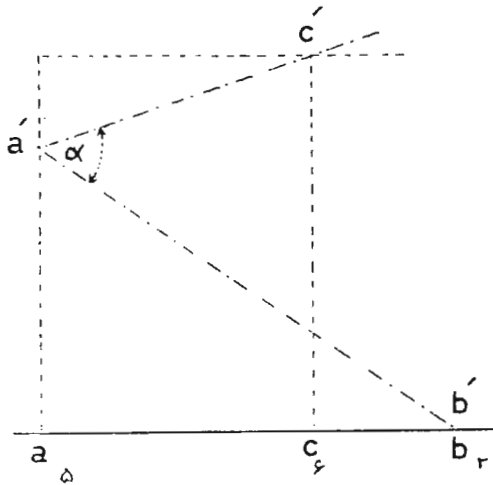
۹ - حالت خاص - زاویه صفحه با صفحه مقایسه - صفحه

مصور مقیاس شیب صفحه را تسطیح کرده تسطیح مقیاس شیب را بدست می آوریم؛ زاویه ای که مقیاس شیب با تسطیحش می سازد جواب است.

ممکن است یکی از افقیه های صفحه را لولا قرار داده برای یکی از نقاط صفحه (مثلاً يك نقطه از مقیاس شیب صفحه) مثلث تسطیح را بسازیم؛ در این صورت، زاویه تسطیح جواب مسئله خواهد بود.

حل چند مسئله مهم

۱۰ - از نقطه A واقع بر خط D ، خطی رسم کنید که با آن زاویه α بسازد.



(ش ۱۰)

مسئله جوابهای بیشمار دارد؛ زیرا که از نقطه واقع بر خطی، بینهایت خط می توان رسم کرد که با آن زاویه α بسازند؛ ما یکی از آن خطوط را رسم می کنیم. اگر نقطه a_5 و

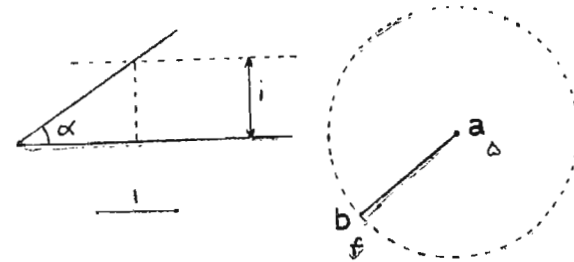
خط a_5b_1 در نظر

باشند (شکل ۱۰)، صفحه مصور a_5b_1 را تسطیح کرده خط a_5c_1 را چنان می کشیم که با a_5b_1 ، تسطیح a_5b_1 ، زاویه مطلوب را بسازد؛ بعد c_1 را در c_5 ترفیع می کنیم؛ خط مطلوب است.

۱۱ - از نقطه a_5 خطی رسم کنید که با صفحه مقایسه زاویه

α بسازد.

ابتدا در گوشه شکل با ساختن زاویه α ، فراز خط را بدست می آوریم (شکل ۱۱)؛ سپس به مرکز a و با شعاعی مساوی آن فراز،



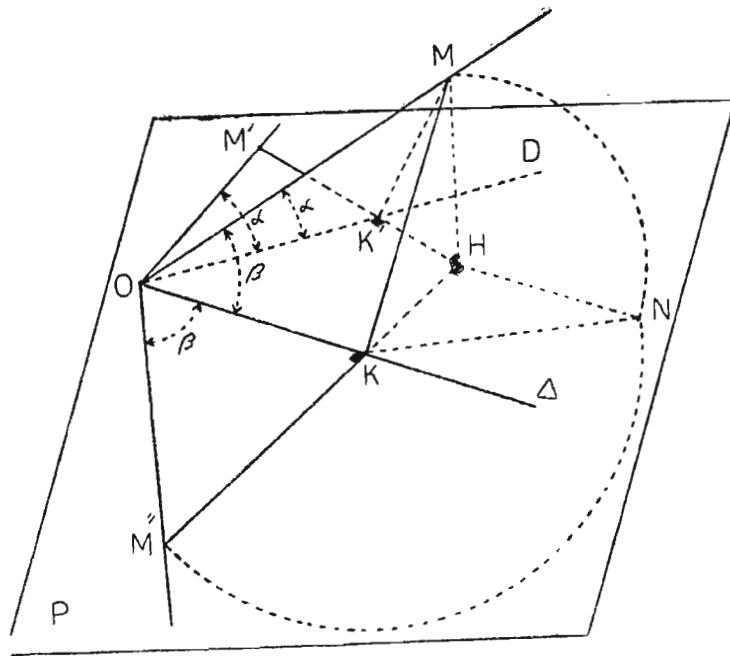
(ش ۱۱)

دایره ای می زنیم؛ هر نقطه این دایره مانند b را که به a وصل کنیم، a_b یک جواب مسئله است و مسئله جوابهای بیشمار دارد.

۱۳- مسئله - بر نقطه O ، محل تقاطع دو خط D و Δ ، خطی بگذرانید که با دو خط D و Δ زوایای α و β بسازد.

حل فضایی - اگر مسئله حل شده و OM خط مطلوب باشد (شکل ۱۲) و از یک نقطه اختیاری M از آن، عمود MH را بر صفحه P که بر دو خط مذکور می گذرد فرود آوریم و از O در صفحه P دو خط رسم کنیم که بترتیب با D و Δ زوایای α و β بسازند و از H دو عمود بر D و Δ فرود آوریم تا D و Δ را در K و K' و دو خط مرسوم را در M' و M'' قطع کنند، دو مثلث قائم الزاویه MOK و $M''OK$ متساویند (حالت دو زاویه و ضلع بین آنها)؛ همچنین دو مثلث MOK' و $M''OK'$ متساویند، پس $OM' = OM'' = OM$ و نیز $KM'' = KM'$ و $K'M' = K'M$ ؛ حال اگر از H خطی موازی Δ بکشیم تا قوسی را که به مرکز K و شعاع KM'' روی صفحه P رسم می کنیم در N تلاقی کند، دو مثلث HKN و HKM نیز متساوی می شوند (زیرا که در H

قائم الزاویه اند و ضلع HK در هر دو مشترک است و $KM = KM'' = KN$ ؛ پس $HM = HN$.



(ش ۱۲)

حال اگر به ترتیب عکس عمل کنیم، یعنی در صفحه P که بر D و Δ می گذرد، دو خط OM' و OM'' را طوری بکشیم که بترتیب با D و Δ زوایای α و β بسازند، و دو طول اختیاری $OM' = OM''$ را بر آنها جدا کنیم و از M' و M'' بترتیب دو عمود $M''K$ و $M'K$ را بر D و Δ فرود آوریم تا یکدیگر را در H قطع کنند و از H خطی موازی Δ بکشیم تا قوسی را که به مرکز K و شعاع KM'' روی صفحه P رسم می کنیم در N قطع کند، طول HN ، که با اجرای این ترسیمات در صفحه P بدست می آید، مساوی اندازه حقیقی HM خواهد بود و برای

تعیین نقطه M کافی است که از H عمودی بر صفحه P اخراج کرده طول HM را مساوی HN بر آن جدا کنیم؛ همینکه نقطه M بدست آمد، خطی که از O به M وصل شود خط مطلوب خواهد بود.

شرط امکان مسئله این است که $\alpha + \beta$ بزرگتر از زاویه بین دو خط مفروض و $\alpha - \beta$ کوچکتر از آن باشد.

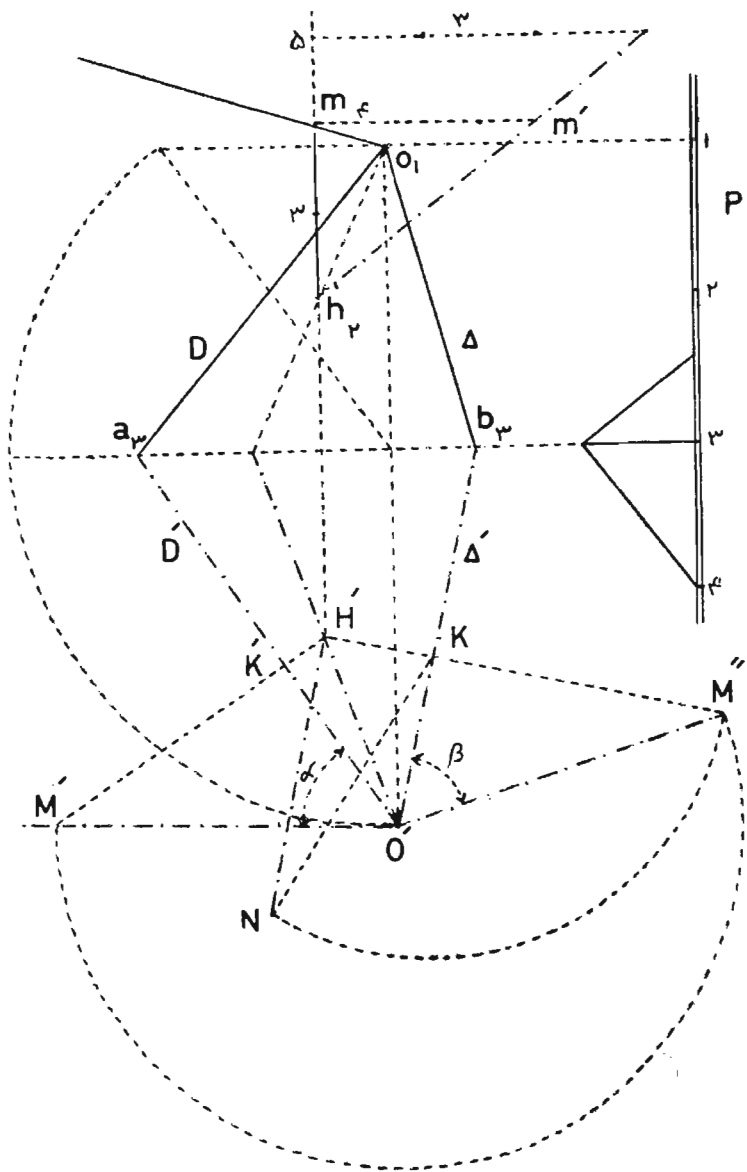
ملخص - قسمتی از حل مسئله، یعنی از رسم صفحه دو خط D و Δ تا تعیین طول عمودی که باید بر صفحه اخراج کنیم، باید در تسطیح حل و رسم شود.

دو خط متقاطع o_1a_3 (یا D) و o_1b_3 (یا Δ) مفروضند (شکل ۱۳)؛ صفحه این دو خط را در حول افقیه رقوم ۳ تسطیح کرده ایم، نقطه o_1 در O' تسطیح شده است و دو خط $O'M'$ و $O'M''$ بترتیب با $O'a$ و $O'b$ زوایای α و β ساخته اند؛ طولهای $O'M'$ و $O'M''$ برابر یکدیگرند؛ $M'K'$ و $M''K$ (بترتیب عمود بر $O'a$ و $O'b$) یکدیگر را در H' قطع کرده اند؛ از H' خطی موازی $O'K$ کشیده ایم تا قوسی به مرکز K و شعاع KM'' را در N قطع کرده است.

H' در h_2 ترفیع شده است و از h_2 عمودی بر صفحه دو خط مفروض اخراج و طولی مساوی $H'N$ بر آن جدا شده تا m_4 بدست آمده است؛ خط o_1m_4 جواب مسئله است.

تبصره - اگر بخواهیم از نقطه ای خطی رسم کنیم که با دو خط متنافر زوایای معین بسازد، کافی است که ابتدا از آن نقطه دو خط به موازات دو خط متنافر بکشیم، سپس خطی رسم کنیم که با دو خط اخیر زوایای معین را تشکیل دهد.

۱۳ - با توجه به اینکه هرگاه خطی با صفحه ای زاویه



(ش ۱۳)

α بسازد با هر خط که بر آن صفحه عمود باشد زاویه $(90^\circ - \alpha)$

می‌سازد و با استفاده از مسئله شماره ۱۲ فصل پنجم، مسائل زیر را می‌توان با آسانی حل کرد :

الف - خطی رسم کنید که با خط مفروض Δ زاویه α و با صفحه مفروض P زاویه β بسازد. کافی است که خطی رسم شود که با Δ زاویه α و با خط عمود بر P زاویه $(90^\circ - \beta)$ تشکیل دهد.

ب - خطی رسم کنید که با دو صفحه مفروض P و Q زوایای α و β بسازد. کافی است که خطی رسم کنیم که با دو خط عمود بر آن دو صفحه زاویه‌های $(90^\circ - \alpha)$ و $(90^\circ - \beta)$ تشکیل دهد.

ج - صفحه‌ای رسم کنید که با دو خط D و Δ زوایای α و β بسازد (α بزرگتر از β فرض می‌شود). کافی است که خطی رسم کنیم که با D و Δ زوایای $(90^\circ - \alpha)$ و $(90^\circ - \beta)$ تشکیل دهد و صفحه‌ای بر آن خط عمود کنیم.

شرط امکان مسئله، هرگاه زاویه بین دو خط D و Δ را φ بنامیم، این است که

$$(90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta) > \varphi$$

$$(90^\circ - \beta) - (90^\circ - \alpha) < \varphi$$

$$\alpha - \beta < \varphi \text{ و } \alpha + \beta < 180^\circ - \varphi$$

یعنی :

د - صفحه‌ای رسم کنید که با خط مفروض Δ زاویه α و با صفحه مفروض P زاویه β بسازد. این صفحه با Δ زاویه α و با خط عمود بر P زاویه $(90^\circ - \beta)$ خواهد ساخت.

ه - صفحه‌ای رسم کنید که با دو صفحه مفروض P و Q زاویه‌های α و β بسازد. این صفحه عمود بر خطی خواهد بود که با دو صفحه P و Q متمم زوایای α و β را تشکیل دهد.

تمرین - ۱ - بر o_5 خطی بگذرانید که با a_1b_4 زاویه 45° و با صفحه قائم مفروض هم زاویه 45° بسازد.

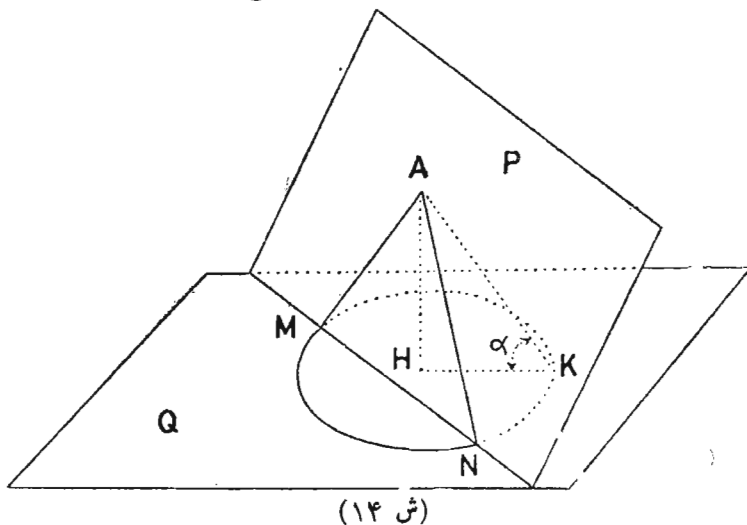
۲ - بر o_5 صفحه‌ای مرور دهید که با a_2b_7 و c_3d_5 بترتیب زاویه‌های 75° و 45° بسازد.

۳ - بر o_5 صفحه‌ای بگذرانید که با a_3b_7 زاویه 20° و با صفحه مقایسه زاویه 45° بسازد.

(برای هریک از قسمتهای ۲ و ۳ شکل جداگانه رسم کنید) .

۱۴ - مسئله - دو صفحه متقاطع P و Q و نقطه A در صفحه P مفروضند؛ در صفحه P بر A خطی مرور دهید که با صفحه Q زاویه α بسازد.

از نقطه A عمود AH را بر Q فرود آورده و AK را بقسمی رسم می‌کنیم که با AH متمم زاویه α را بسازد و Q را در K قطع کند (شکل ۱۴)؛ در صفحه Q به مرکز H و شعاع HK دایره‌ای می‌زنیم



تا فصل مشترك دو صفحه را در M و N قطع کند؛ AM و AN جوابهای مسئله‌اند (شکل ۱۴). اگر دایره مذکور بر فصل مشترك دو صفحه مماس شود، مسئله فقط يك جواب دارد که بزرگترین شیب صفحه P نسبت به صفحه Q است. هرگاه دایره مذکور فصل مشترك

دو صفحه را قطع نکند، مسئله دارای جواب نیست؛ به عبارت دیگر، اگر α از مسطحه دو صفحه کوچکتر باشد مسئله دو جواب دارد و اگر با آن مساوی باشد، يك جواب دارد، و اگر بزرگتر باشد، جواب ندارد.

تمرین - دو صفحه P و Q اولی به شیب $\frac{1}{4}$ و دومی به شیب $\frac{1}{3}$ را چنان

رسم کنید که مقیاس شیبهایشان با هم زاویه 45° بسازند، در P نقطه ای به رقوم ۱ اختیار کنید و از آن در صفحه P خطی رسم کنید که با صفحه Q زاویه 30° بسازد.

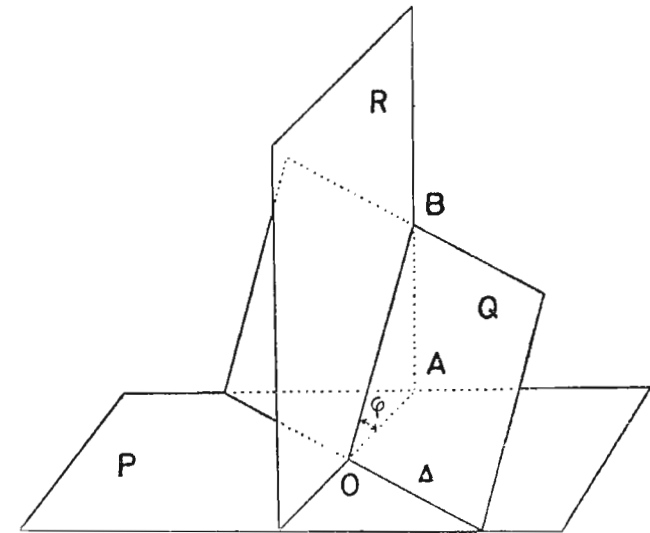
۱۵- مسئله - بر خط مفروض Δ صفحه ای مرور دهید که با صفحه مفروض P زاویه φ بسازد.

در حل این مسئله سه حالت اتفاق می افتد:

الف - خط Δ در صفحه P است؛ ب - خط Δ با صفحه P

موازی است؛ ج - خط Δ صفحه P را قطع می کند.

حالت اول - خط Δ در صفحه P است (شکل ۱۵) و می خواهیم

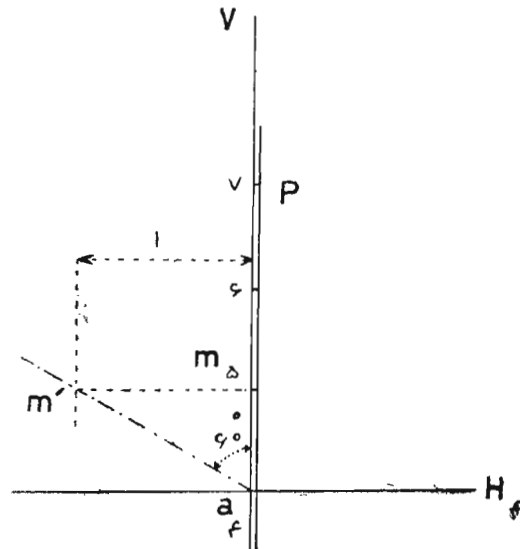


(ش ۱۵)

بر آن صفحه ای بگذرانیم که با P زاویه φ بسازد. از يك نقطه O واقع بر Δ صفحه ای مانند R بر آن عمود می کنیم تا صفحه P را در فصل مشترك OA قطع کند؛ در صفحه R از نقطه O خطی مانند OB می کشیم که با OA زاویه φ بسازد؛ صفحه Q که بر دو خط Δ و OB می گذرد، صفحه مطلوب است؛ زیرا که مسطحه فرجه دو صفحه P و Q برابر φ است. مسئله همیشه دو جواب دارد مگر به ازای $\varphi = 90^\circ$ که يك جواب دارد.

ملخص - خط H_4 در صفحه افقی رقوم ۴ داده شده (شکل ۱۶)؛

برای آنکه بر H_4 صفحه ای بگذرانیم که با صفحه افقی زاویه 60° بسازد،



(ش ۱۶)

از نقطه a_4 واقع بر H_4 ، صفحه ای بر آن عمود کرده ایم (صفحه قائم V)؛ آنگاه آن را در حول افقیه رقوم ۴ به موازات صفحه مقایسه تسطیح کرده am' را چنان کشیده ایم که با صفحه مقایسه زاویه 60° بسازد؛ تسطیح نقطه رقوم ۵ را بدست آورده آن را در m_5 ترفیع کرده ایم و مقیاس شیب صفحه $H_4 a_4 m_5$ ، صفحه مطلوب، را رسم کرده مندرج ساختیم.

حالت دوم - هرگاه خط Δ با صفحه P موازی باشد، بر آن صفحه‌ای به موازات P می‌گذرانیم و مسئله را مانند حالت اول حل می‌کنیم.

حالت سوم - صفحه Δ را در O قطع می‌کند (شکل ۱۷). از یکی از نقاط خط، مثلاً A ، عمود AH را بر صفحه P فرود می‌آوریم و نیز از A خطی می‌کشیم که با AH زاویه $(90^\circ - \varphi)$ بسازد و P را

در K قطع کند؛ در

صفحه P به مرکز H

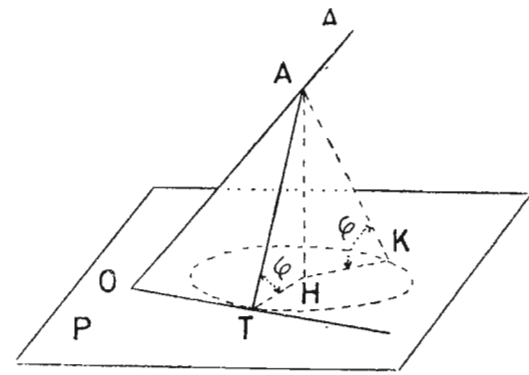
و شعاع HK دایره‌ای

می‌زنیم و از O مماس

را بر این دایره

رسم می‌کنیم؛ صفحه‌ای

که بر OA و OT بگذرد



(ش ۱۷)

صفحه مطلوب است؛ زیرا که با صفحه P زاویه $\varphi = \angle ATH$ را می‌سازد.

هرگاه φ از میل خط نسبت به صفحه P بزرگتر باشد، نقطه O

در خارج دایره مرسوم می‌افتد و از آن می‌توان دو مماس بر آن دایره

رسم کرد؛ پس مسئله دو جواب دارد. اگر φ مساوی میل خط باشد،

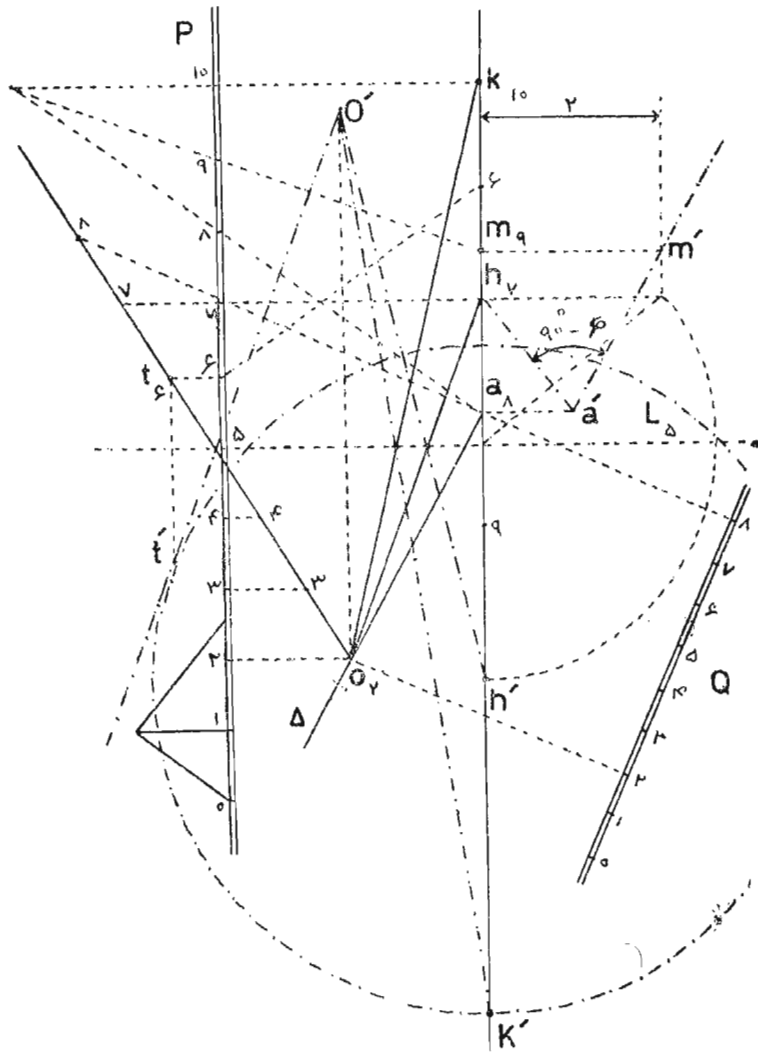
دایره بر O می‌گذرد و مسئله فقط دارای یک جواب است. اگر φ از میل

خط کوچکتر باشد، مسئله دارای جواب نیست.

مناخص - صفحه P و خط $a_8 o_7$ (یا Δ) داده شده‌اند؛ می‌خواهیم

براین خط صفحه‌ای بگذرانیم که با P زاویه φ بسازد (شکل ۱۸)؛

o_7 نقطه تقاطع خط با صفحه است.



(ش ۱۸)

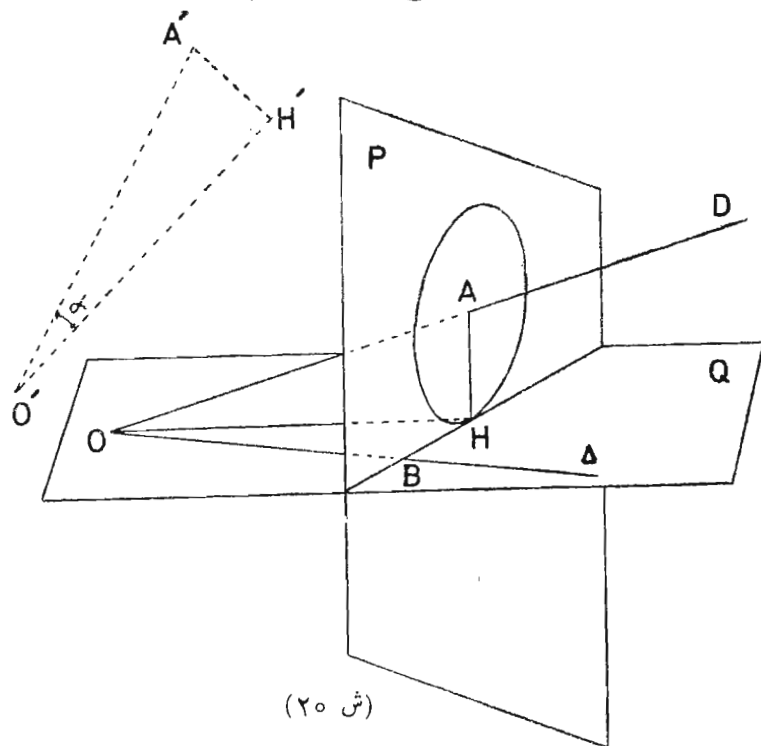
از a_8 عمودی بر صفحه P رسم کرده و h_7 پای عمود را بدست

آورده‌ایم؛ سپس این عمود را با صفحه مصورش بر صفحه افقی رقوم 7

تسطیح کرده از a' ، تسطیح a_8 ، خطی کشیده‌ایم که با $a'h$ ، تسطیح $a_8 h_7$ ،

۱۷ - مسئله - بر خط مغروض Δ صفحه‌ای بگذرانید که با خط مغروض دیگر D زاویه α بسازد.

دو خط را در O متقاطع فرض می‌کنیم (شکل ۲۰). از نقطه



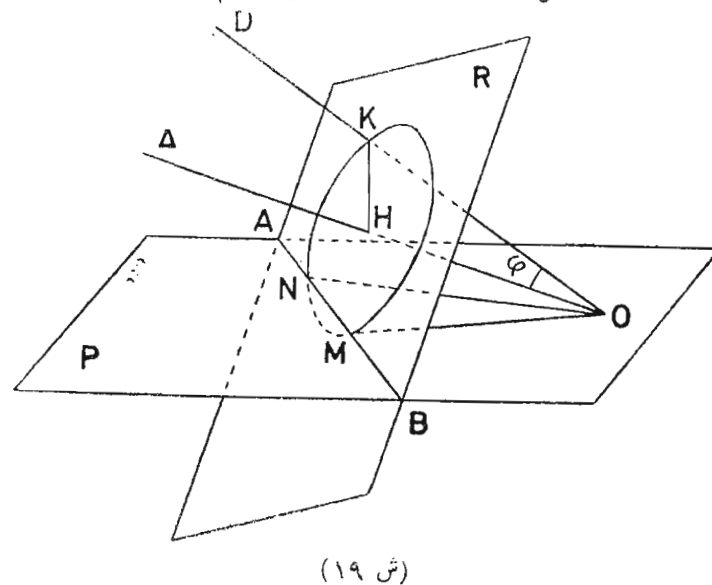
اختیاری A واقع بر D صفحه P را بر Δ عمود می‌کنیم تا آن را در B قطع کند؛ در خارج، مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که وترش مساوی OA و یک زاویه‌اش مساوی α باشد؛ در صفحه P به مرکز A و شعاعی

زاویه $(\varphi - \alpha_n)$ ساخته است؛ این خط را در $a_8 m_8$ ترفیع کرده ایم؛ نقطه برخورد $a_8 m_8$ با صفحه P نقطه k_{10} است؛ h_7 و o_7 و k_{10} را در حول افقیه I_8 از صفحه P در h' و o' و k' تسطیح کرده از O' بر دایره ای به مرکز h' و شعاع $h'k'$ مماس $O't'$ را کشیده و آن را در $o_7 t_7$ ترفیع کرده ایم؛ صفحه ای که بر $o_7 a_8$ و $o_7 t_7$ می گذرد، يك جواب مسئله است؛ Q مقیاس شیب آن را بدست آورده ایم.

تبصره ۵ - می توان حالت دوم را مانند حالت سوم عمل کرد و نقطه

○ را منهایم دور انگاشت .

۱۶- مسئله - در صفحه مفروض P خطی رسم کنید که با خط Δ ، که خارج صفحه است ، زاویه φ بسازد .
 O فصل مشترک P و Δ را بدست می آوریم ؛ از O خطی مانند



D می کشیم که با Δ زاویه ψ بسازد؛ از نقطه H که بر Δ اختیار می شود، صفحه R را بر این خط عمود می کنیم تا D را در K و P را در فصل

مساوی $A'H'$ دایره‌ای می‌زنیم و از B مماس BH را بر آن رسم می‌کنیم؛ صفحه Q که بر Δ و BH می‌گذرد جواب مسئله است؛ زیرا که با خط D زاویه $\alpha = \angle AOH$ را می‌سازد.

تمرین

- ۱- فاصله نقطه a_1 را از خط b_1c_1 تعیین کنید.
- ۲- فاصله نقطه a_1 را از افقیه b_1c_1 یا از افقیه b_1c_1 تعیین کنید.
- ۳- در صفحه مفروض P از نقطه a_1 خطی در این صفحه چنان رسم کنید که فاصله آن از نقطه b_1 واقع در همین صفحه برابر طول I باشد (بحث).
- ۴- در صفحه مفروض P نقطه‌ای تعیین کنید که از سه نقطه a_1 و b_1 و c_1 به یک فاصله باشد.
- ۵- نقطه a_1 و خط b_1c_1 مفروضند؛ مطلوب است تعیین نقطه‌ای از صفحه مفروض P که به مقیاس شیبش نموده شده بقسمی که از نقطه و خط فوق‌الذکر متحدالفاصله باشد.
- ۶- خط a_1b_1 و دایره معلوم C واقع در صفحه P مفروضند. فاصله نزدیکترین نقطه دایره را از خط تعیین کنید.
- ۷- زاویه خط a_1b_1 را اولاً با صفحه مقایسه، ثانیاً با صفحه قائمی که به وسیله اثرش V نمایش داده‌ایم، بدست آورید.
- ۸- دو خط a_1b_1 و c_1d_1 مفروضند؛ زاویه حقیقی این دو خط را به وسیله ترسیم نمایش دهید.
- ۹- از نقطه مفروض P خطی رسم کنید که با m_1n_1 زاویه‌ای برابر 60° یا 45° بسازد و آن را قطع کند.
- ۱۰- در صفحه مفروض P خطی رسم کنید که زاویه آن با صفحه مقایسه ماکزیم باشد.
- ۱۱- از نقطه مفروض خطی رسم کنید موازی صفحه P که با دو خط

- معلوم زوایای متساوی تشکیل دهد.
- ۱۲- از نقطه مفروض، خطی رسم کنید که با دو خط متقاطع زوایای متساوی تشکیل دهد. (عده جوابها)؟
 - ۱۳- نقطه a_1 و صفحات P و Q مفروضند؛ از این نقطه صفحه‌ای مرور دهید عمود بر P که با صفحه Q زاویه‌ای برابر 60° تشکیل دهد.
 - ۱۴- زاویه بین یک صفحه قائم و یک صفحه را که به مقیاس شیبش نموده شده است، تعیین کنید.
 - ۱۵- از نقطه a_1 خطی در صفحه افق چنان رسم کنید که با خط b_1c_1 زاویه‌ای برابر 45° درجه تشکیل دهد.
 - ۱۶- زاویه بین یک صفحه را که به وسیله مقیاس شیبش نموده شده است، با صفحه‌ای که مقیاس شیبش به موازات مقیاس شیب صفحه اول باشد، بدست آورید.
 - ۱۷- بر خط a_1b_1 واقع در صفحه مفروض P صفحه‌ای مرور دهید که زاویه‌اش با صفحه P برابر 60° درجه شود.
 - ۱۸- بر نقطه a_1 صفحه‌ای مرور دهید که بر صفحه مفروض P عمود باشد و با صفحه Q زاویه‌ای برابر 45° درجه بسازد.
 - ۱۹- بر نقطه a_1 دو صفحه چنان مرور دهید که آثار افقی آنها متوازی باشند و زاویه بین آنها 50° درجه باشد. عده جوابها؟
 - ۲۰- بر صفحه مفروض، نقطه‌ای بدست آورید که از دو نقطه مفروض به فواصل I و II باشد؛ (بحث).
 - ۲۱- در صفحه مفروض، خطی چنان رسم کنید که جزئی از آن که بین دو خط معین صفحه محدود می‌شود، به طول I باشد و خود آن با خط مفروض دیگری از همان صفحه زاویه α بسازد.
 - ۲۲- بر خط مفروض، نقطه‌ای چنان تعیین کنید که: ۱- از دو خط متقاطع مفروض، به یک فاصله باشد. ۲- از خط و نقطه مفروضی به یک فاصله باشد.
 - ۲۳- دو خط متوازی Δ و D و دو نقطه a_1 و b_1 در صفحه مار بر آن دو خط داده شده‌اند؛ بر آن دو نقطه دو خط متوازی بگذرانید که با D و Δ تشکیل یک لوزی دهند.
 - ۲۴- دو خط متناظر Δ و D داده شده‌اند؛ یک لوزی بسازید که قطر

اطولش بر Δ و قطر اقصرش بر عمود مشترك دو خط و يك رأسش بر D واقع باشند و قطر اطول آن دو برابر قطر اقصرش باشد .

۲۵- دو نقطه C و B و صفحه P داده شده اند؛ مثلث متساوی الاضلاعی بسازید که دو رأسش C و B و رأس سومش در صفحه P باشد .

۲۶- بر خطی واقع در صفحه مقایسه ، نقطه ای معین کنید که از نقطه مفروض M به فاصله l باشد .

۲۷- در صفحه P نقطه ای معین کنید که از خط مفروض Δ که با صفحه موازی است ، به فاصله l و از نقطه مفروض A به فاصله l' باشد .

۲۸- بر یکی از دو خط متناظر مفروض ، نقطه ای معین کنید که از خط دیگر به فاصله l باشد .

۲۹- خط Δ محمول ضلع مربعی است به ضلع l که مرکزش بر خط افقی معینی قرار دارد ؛ مربع را بسازید .

۳۰- نقطه ای چنان تعیین کنید که از صفحه افقی به فاصله h و از خط افقی مفروض به فاصله d و از نقطه مفروض A به فاصله l باشد .

۳۱- بر نقطه A صفحه ای بگذرانید که از سه نقطه B و C و D به يك فاصله باشد .

۳۲- بر نقطه A صفحه ای بگذرانید که از دو نقطه D و C به فواصل l و l' باشد .

۳۳- نقطه O واقع در صفحه P مرکز دایره ای است از صفحه P به شعاع R ؛ بر روی دایره نقطه ای بیابید که نسبت فواصلش از دو خط واقع در همان صفحه مساوی k باشد .

۳۴- صفحه P و خط Δ مفروضند ؛ صفحه ای به موازات P چنان رسم کنید که قسمتی از Δ که بین دو صفحه محدود می شود ، به طول معین l باشد .

۳۵- از نقطه A واقع در صفحه P قطعه خطی به طول l چنان رسم کنید که طول تصویرش بزرگترین (یا کوچکترین) مقداری را که ممکن است ، داشته باشد .

۳۶- مربعی با این معلومات بسازید : تصویر رقوم دار ضلع AB و تصویر بی رقوم امتداد ضلع BC .

۳۷- از نقطه A واقع در صفحه P خطی در آن صفحه چنان رسم کنید که بایکی از این خطوط زاویه α بسازد : ۱- افقیه ، ۲- غیر مشخص .

۳۸- دو خط متقاطع D و Δ مفروضند؛ بر نقطه تلاقی آنها خطی مرور دهید که تصویرش بر تصویر Δ منطبق باشد و خود در فضا با D زاویه β تشکیل دهد .

۳۹- دو خط متقاطع A و B داده شده اند ؛ بر A صفحه ای بگذرانید که با B زاویه α بسازد .

۴۰- بر نقطه O خطی مرور دهید که خط مفروض Δ را قطع کند و با صفحه مقایسه زاویه α بسازد .

۴۱- بر خط مفروض ، صفحه ای مرور دهید که با صفحه مصور قائم آن خط زاویه φ بسازد .

۴۲- بر خط مفروض ، صفحه ای بگذرانید که با دو صفحه مفروض ، زوایای متساوی بسازد .

تعریف - کنج سه قائمه کنجی است که هر سه فرجه اش قائمه باشند . در چنین کنجی سه یال ، دو بدو بر هم عمودند . هرگاه صفحه ای کنج سه قائمه را قطع کند و از رأس کنج عمودی بر آن صفحه فرود آوریم . موقع عمود ، نقطه تلاقی ارتفاعهای مثلثی است که رؤوسش نقاط تلاقی یالهای کنج با صفحه قاطع باشند .

۴۳- مطلوب است رسم کنج سه قائمه ای که رأس S و یال Δ از آن معین باشند و يك یال دیگر آن با صفحه مقایسه زاویه α بسازد .

۴۴- نقطه مفروض g رأس کنج سه قائمه ای است که تصاویر بی رقوم هر سه یال آن داده شده اند ؛ آنها را مدرج کنید .

۴۵- آثار سه یال کنج سه قائمه ای معلومند ؛ کنج را بسازید .

۴۶- از کنج سه قائمه ای تصاویر بی رقوم دویال و آثار آنها داده شده اند ؛ یال سوم را بدست آورید .

۴۷- خطی به موازات صفحه مفروضی رسم کنید که خط مفروضی را در نقطه معینی قطع کند و با همین خط زاویه α بسازد .

۴۸- دو خط متناظر Δ و D و صفحه P داده شده اند ؛ خطی موازی با صفحه P چنان رسم کنید که با Δ و D زوایای متساوی تشکیل دهد و یکی از دو خط Δ و D را در نقطه معینی قطع کند .

۴۹- در صفحه مفروض ، خطی چنان رسم کنید که با خط مفروضی زاویه β بسازد . عدد جوابها ؟

۵۰- بر نقطه مفروض ، صفحه ای رسم کنید که بر صفحه مفروض عمود باشد و با صفحه مفروض دیگر زاویه α بسازد .

۵۱- مربع مستطیل ABCD را رسم کنید و آن را نمایش آینه‌ای بدانید که شعاع MO در نقطه O به آن می‌تابد؛ شعاع منعکس را رسم کنید. (می‌دانیم که زاویه تابش مساوی است با زاویه انعکاس). مشخصات آینه و شعاع نور اختیاری است.

۵۲- خطی موازی با صفحه مفروض P چنان رسم کنید که با صفحه افقی زاویه α بسازد و خط مفروض Δ را قطع کند و جزئی از آن که محدود بین Δ و صفحه مقایسه است، مساوی I باشد.

فصل ششم

چندوجهیها

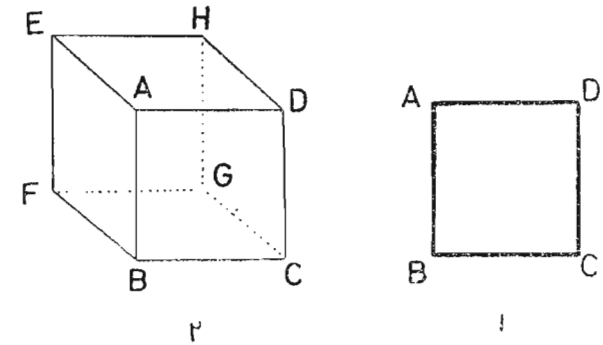
۱- تعریف - چندوجهی، یا کثیرالوجوه، جسمی است که از هر طرف به یک چندضلعی مستوی محدود باشد. هر یک از چندضلعیهای که جسم را محدود می‌کند وجه و هر یک از اضلاع و رؤوس آنها را به ترتیب یال و رأس چندوجهی می‌نامند.

چندوجهی، محدب است وقتی که هر یک از وجوه آن را امتداد دهیم، تمام جسم در یک طرف آن وجه واقع شود.

چندوجهی منتظم آن است که تمام وجوه آن چندضلعیهای منتظم متساوی و جمیع فرجه‌های آن متساوی باشند؛ عدد چند وجهیهای منتظم محدب، منحصر به پنج نوع است و آنها را اجسام افلاطونی می‌گویند (چهاروجهی منتظم، ششوجهی منتظم، هشتوجهی منتظم، دوازدهوجهی منتظم و بیستوجهی منتظم).

۲- نمایش چندوجهی - چندوجهی را به وسیله تصویرش نمایش می‌دهند؛ ملخص کامل جسم، به این ترتیب بدست می‌آید که تصاویر رقومدار رؤس آن را، بر طبق تعریف هندسی جسم، دوبندو به یکدیگر وصل کنیم.

۴- دورهٔ ظاهری - دورهٔ ظاهری هر جسم، يك چند ضلعی است که وجوه و یالها و رئوس مرئی چندوجهی در داخل آن دیده می‌شوند؛ دورهٔ ظاهری يك جسم، بسته به وضع چشم ناظر، فرق می‌کند. مثلاً اگر به مكعبی کاملاً از روبرو نگاه کنیم بقسمی که فقط يك وجه آن را بینیم، دورهٔ ظاهری آن، مربع $ABCD$ است (شکل ۱-۱)؛ ولی هرگاه به آن از نقطه‌ای نگاه کنیم که سه وجه آن دیده شوند (شکل ۱-۲)

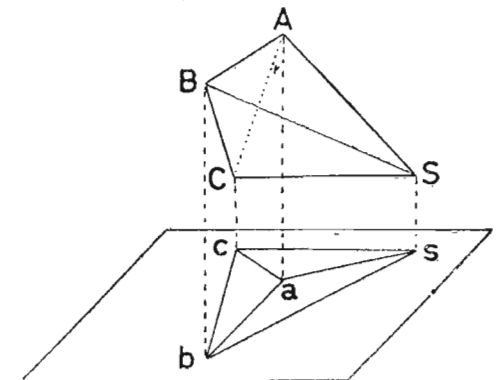


(ش ۱)

دورهٔ ظاهری آن، شش ضلعی $BCDHEF$ است.

تصویر دورهٔ ظاهری جسم، دورهٔ ظاهری تصویر آن است.

خطی که يك نقطه را به چشم ناظر مربوط کند، شعاع بصری آن نقطه نامیده می‌شود. برای تعیین دورهٔ ظاهری تصویر جسمی، چنان فرض می‌کنیم که



(ش ۲)

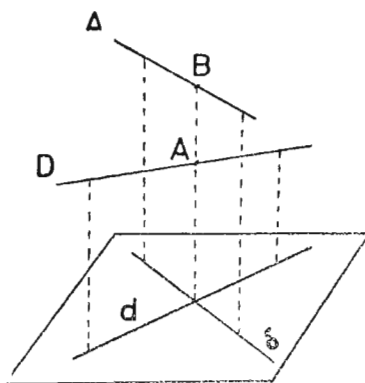
شخص ناظر از فاصلهٔ بینهایت دور به آن جسم نگاه کند و امتداد اشعهٔ بصری او بر صفحهٔ تصویر عمود باشد.

۴- مرئی و مخفی - بدیهی است که دورهٔ ظاهری جسم، مرئی است؛ یعنی دیده می‌شود؛ اما از یالها و رئوس و وجوه، برخی مرئی و بعضی مخفی هستند، یعنی وجوه دیگر جسم، بین چشم ناظر و آنها حایل می‌شوند و آنها را از نظر پنهان می‌دارند. در تعیین اجزای مرئی و مخفی جسم، این نکات را باید در نظر

داشت:

الف - هرگاه رأسی نامرئی باشد، تمام یالهایی که به آن منتهی می‌شوند نامرئی، یعنی مخفی، خواهند بود؛ بعکس، تمام یالهایی که بر يك رأس مرئی می‌گذرند، مرئی هستند.

ب - هرگاه یالی مخفی باشد، دو وجهی که به آن محدود می‌شوند، نامرئی هستند؛ بعکس، دو وجهی که بر یالی مرئی می‌گذرند، مرئی هستند.



(ش ۳)

ج - از دو یال متنافر، آن که به چشم نزدیکتر است، مرئی و دیگری مخفی است. برای اینکه بینیم از دو خط متنافر Δ و D (شکل ۳) کدام به چشم نزدیکتر است، کافی است که از نقطهٔ تقاطع تصاویر آنها به چشم وصل کنیم؛ این خط، D و Δ را در A و B قطع خواهد

کرد؛ هر يك از دو نقطه A و B که به صفحه تصوير نزديکتر باشد، از چشم دورتر بوده و خطی که از آن می گذرد مخفی است و خط ديگر که به چشم نزديکتر است، مرئی می باشد.

هرگاه چند يال متقارب

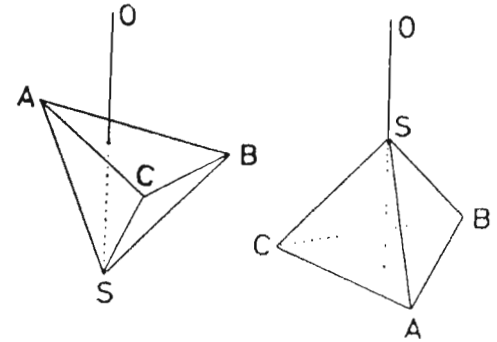
باشند (شکل ۴)، يا همه مرئی يا همه مخفیند؛ برای تحقيق مطلب، از نقطه تقارب آنها به چشم وصل می کنیم؛ اگر خط

واصل بدون برخورد با

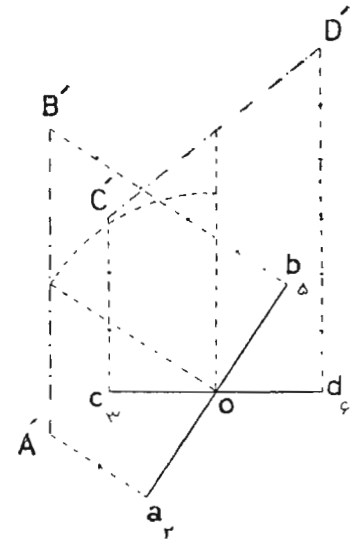
وجهی به چشم برسد (شکل ۴، راست)، آن رأس و همه يالهایی که به آن منتهی می شوند، مرئی هستند ولی اگر یکی از وجوه جسم بين آن رأس و چشم حایل شود و خط واصل آن وجه را قطع کند (شکل ۴، چپ)، رأس مذکور و يالهای منتهی به آن مخفی خواهند بود.

مثال ۱ - تحقيق کنید که از دو خط a_1b_1 و c_1d_1 دارای نقطه نامرئی است.

رقوم نقطه o ، محل تلاقی ab و cd ، را در روی هر دو خط بدست می آوریم؛ اين نقطه در روی هر خط که رقوم کمتری داشته باشد، مخفی است؛ در شکل ۵،



(ش ۴)



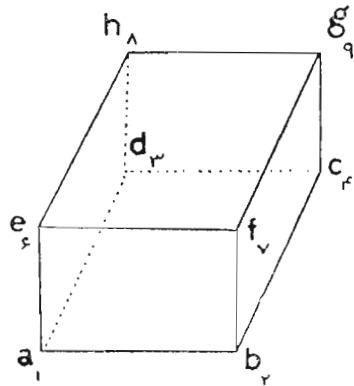
(ش ۵)

خط a_1b_1 دارای نقطه نامرئی است.

مثال ۲ - در متوازی السطوح $a_1b_1c_1d_1e_1f_1g_1h_1$ (شکل ۶)

يالهای مرئی و مخفی را تعیین کنید.

در اين شکل، سه يال به d_1 منتهی می شوند و سه يال به f_1 ؛ از

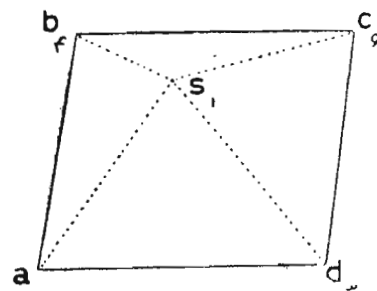


(ش ۶)

اين دو دسته يال، يك دسته مرئی است و يك دسته مخفی؛ برای تشخيص آنها از يك ديگر، يك يال از هر دسته را در نظر می گیریم بطوری که تصويرهايشان متقاطع باشند، مانند a_1d_1 و e_1f_1 ؛ نقطه تقاطع آنها بر روی e_1f_1 رقوم بیشتری دارد؛ پس e_1f_1 بالاتر است و مرئی است؛ f_1g_1 و b_1f_1 نیز مرئی هستند و سه يال منتهی به d_1 مخفی می باشند.

مثال ۳ - برای تعیین يالهای

مرئی و مخفی هرم $s_1a_1b_1c_1d_1$ بطور موقت از رقوم s صرف نظر می کنیم و رقوم s را به فرض اينکه در صفحه وجه مقابل باشد پيدا می کنیم، تقريباً ۴ حاصل می شود؛



(ش ۷)

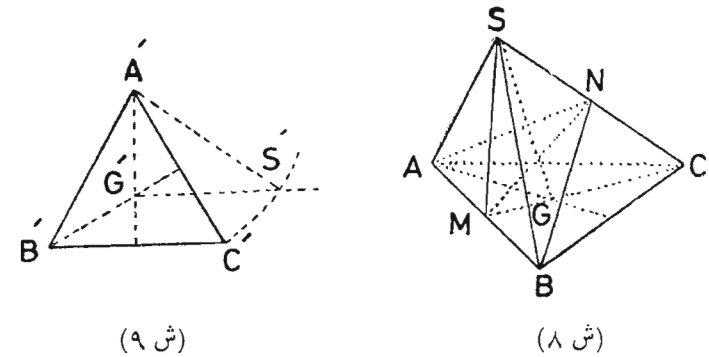
چون رقوم s_1 از ۴ کمتر است، s_1 و يالهای منتهی به آن مخفیند.

۵ - چهاروجهی منتظم - چهاروجهی منتظم هر می است مرکب

از چهار مثلث متساوی الاضلاع و متساوی که سه سه در حول هر رأس جمع

شده باشند (شکل ۸). برای رسم چهاروجهی منتظمی به یال a ، کافی است که مثلث متساوی الاضلاع ABC را به ضلع a بسازیم و از G ، محل تلاقی میانه‌های آن، عمودی بر صفحه مثلث اخراج کنیم و در صفحه‌ای که بر این عمود و یکی از رئوس مثلث می‌گذرد، به مرکز آن رأس و به شعاع a قوسی رسم کنیم تا عمود را در S قطع کند.

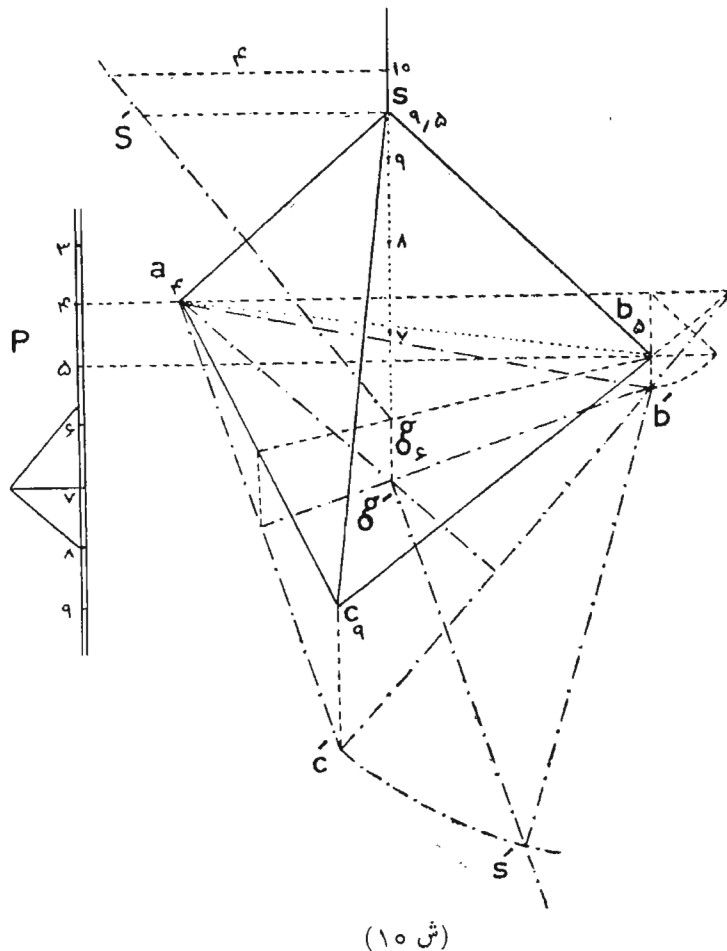
راه عملی این است که بر عمودی که از G بر صفحه ABC اخراج می‌شود، از نقطه G ، طولی مساوی SG ، ارتفاع چهاروجهی، جدا کنیم: برای تعیین طول SG مثلث متساوی الاضلاع $A'B'C'$ را به ضلع a رسم می‌کنیم (شکل ۹)؛ از G' ، محل تلاقی میانه‌ها، خطی موازی



با يك ضلع، مثلاً $B'C'$ ، می‌کشیم و به مرکز رأس مقابل یعنی A' و با شعاعی برابر a قوسی می‌زنیم تا آن خط را در S' قطع کند؛ $G'S'$ مساوی ارتفاع چهاروجهی است؛ زیرا که مثلث ASG در شکل ۸ با مثلث $A'S'G'$ در شکل ۹ متساوی است (اثبات تساوی برعهده دانش آموزان است). در چهاروجهی منتظم، هر دو یال متنافر، مانند AB و SC ، برهم عمودند؛ زیرا که نقاط S و C که به يك فاصله از A و B قرار گرفته‌اند، در صفحه عمود منصف AB واقعند. خط MN که اوساط یالهای AB

و CS را به هم وصل می‌کند، عمود مشترك این دو یال است؛ زیرا که مثلثهای ANB و SMC هر دو متساوی الساقین می‌باشند (چرا؟) و خط واصل از رأس به وسط قاعده، بر قاعده عمود است. خط MN محور تقارن چهاروجهی و صفحات ANB و SMC صفحات تقارن جسمند. هر چهاروجهی منتظم سه محور تقارن و سه زوج صفحه تقارن دارد.

ملخص ۱- می‌خواهیم چهار وجهی منتظمی بسازیم که يك وجهش



در صفحه P و a_4b_5 يك ضلع آن وجه باشد .

صفحه را در حول افقیه رقوم ۴ تسطیح کرده مثلث متساوی الاضلاعی روی ab' ساخته ایم و در آن g' ، تسطیح نقطه تقاطع میانه ها ، و نیز طول $g's'$ را بدست آورده ایم؛ آنگاه c' را در c_4 و g' را در g_6 ترفیع کرده از آن عمودی به طول $g's'$ بر صفحه اخراج کرده ایم ؛ $s_{1/5}$ رأس چهاروجهی است ، شکل را کامل کرده ایم . یال a_4b_5 مخفی است .

۶- مکعب یا شش وجهی منتظم تشکیل می شود از شش مربع متساوی که سه سه در حول هر رأس آن جمع شوند . تمام کنجهای آن سه قائمه اند . برای ساختن مکعب (شکل ۱۱) کافی است که از رؤوس مربع $ABCD$ عمودهایی بر صفحه آن اخراج کنیم و بر روی آنها طولهای AE و BF و CG و DH را برابر ضلع مربع نقل کرده انتهای آنها را به هم وصل کنیم .

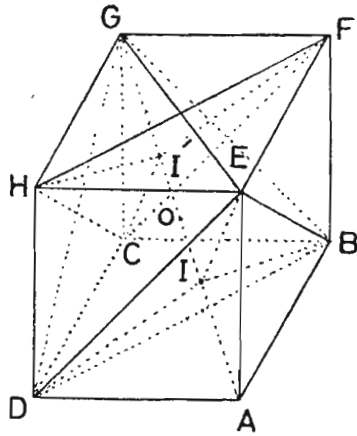
هر مکعب دارای ۱۲ یال و چهار قطر است . نقطه تلاقی اقطار را مرکز مکعب گویند .

صفحات قطری مکعب - هر دو یال متوازی مکعب که در يك وجه آن قرار نگرفته باشند ، به یالهای متقابل موسومند ؛ مانند یالهای BF و DH . صفحاتی را که بر دو یال متقابل مکعب بگذرند ، صفحات قطری نامند ، مانند صفحه $BDHF$. بطور کلی هر دو قطر مکعب صفحه ای موسوم به صفحه قطری تشکیل می دهند .

۷- خواص مکعب :

الف - هر قطر مکعب با تمام یالهای آن زوایای متساوی

می سازد .



(ش ۱۱)

در مکعب شکل ۱۱ ، یکی از قطرهای ، مثلاً AG ، را می کشیم و رؤوس B و D و E را به G وصل می کنیم ؛ سه مثلث ABG و ADG و AEG که سه ضلعشان نظیر بنظیر متساویند ، با یکدیگر برابرند و در نتیجه :

$$\widehat{BAG} = \widehat{DAG} = \widehat{EAG}$$

ب - سه انتهای سه یال مکعب که بر يك رأس می گذرند ،

در صفحه ای واقعند که بر قطر مار بر آن رأس عمود است .

درحقیقت ، طول تصویر هر یال بر روی قطر ، مساوی است با حاصل ضرب طول آن یال در کسینوس زاویه بین یال و قطر ؛ چون تمام یالها با هم برابرند و نیز زوایای آنها با قطر مکعب متساویند ، تصاویر آنها بر روی قطر متساویند و سه تصویری که از يك رأس شروع می شوند ، دارای يك انتها هستند ؛ یعنی سه انتهای هر سه یال که به انتهای قطری محدود می شوند ، بر روی صفحه ای واقعند عمود بر آن قطر .

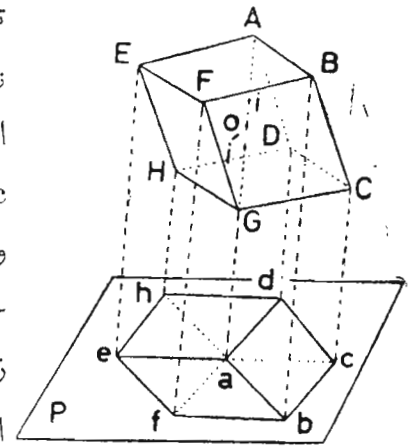
نتیجه ۱- سه انتهای سه یال مذکور ، رؤوس مثلث متساوی الاضلاعی هستند و تصویر آنها روی قطر ، بر مرکز آن مثلث واقع است .

نتیجه ۲- تصاویر یالها بر قطر ، آن را به سه جزء متساوی تقسیم می کنند .

ج - تصویر مکعب بر روی هر صفحه ای که بر قطر آن

عمود باشد ، مسدسی است منتظم - مکعب $ABCDEFGH$ را بر

صفحه P تصویر می‌کنیم (شکل ۱۲). تصویر قطر AG، که بنا به فرض بر صفحه P عمود است، نقطه‌ای است مانند a؛ این نقطه تصویر مراکز مکعب و مثلث BDE نیز می‌باشد؛ چون صفحه مثلث BDE عمود است بر قطر AG، موازی می‌شود با صفحه P؛ بنا بر این تصویر آن روی صفحه P مثلث متساوی‌الاضلاع است مانند bde که مساوی BDE است؛ بعلاوه نقطه a مرکز دایره محیطی مثلث bde خواهد بود؛ و چون نقاط C و F و H و E و D و B نسبت به مرکز مکعبند، تصاویر آنها نیز قرینه‌های e و d و b و



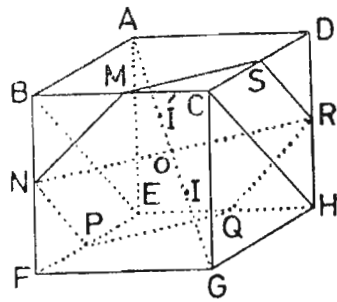
(ش ۱۲)

نسبت به نقطه a خواهند بود؛ از اینجا معلوم می‌شود که نقاط b و c و d و e و f و h روی دایره‌ای واقعند که مرکز آن a می‌باشد؛ چون جميع يالهای مکعب با قطر AG يك زاویه دارند، با صفحه P، که عمود است بر AG، متمم همین زاویه را خواهند داشت؛ از این مطلب معلوم می‌شود که طولهای تصاویر يالها روی صفحه P باهم برابرند و در نتیجه شکل bcdhef شش ضلعی منتظم است.

د - اوساط شش يال مکعب که هیچیک بر طرفین قطر AG نمی‌گذرند، رؤوس مسدسی هستند منتظم که صفحه آن در وسط قطر AG بر این قطر عمود است.

اولاً: از اتصال اوساط يالهای BC و BF و FE و EH و HD و

و DC شش ضلعی MNPQRS (شکل ۱۳) حاصل می‌شود که مسطح است؛ زیرا که خطوط RS و PN که بترتیب با دو خط متوازی CH و BE موازیند، تشکیل صفحه‌ای می‌دهند که خط NR در آن واقع است؛ و چون خطوط MS و PQ با NR موازیند (به چه دلیل؟) و یک نقطه در صفحه NPRS دارند، در این صفحه قرار می‌گیرند؛ بنا بر این نقاط M و Q در صفحه NPRS واقع می‌شوند یعنی شش ضلعی MNPQRS مسطح است.



(ش ۱۳)

ثانیاً: اضلاع شش ضلعی مذکور باهم برابرند؛ زیرا که هر يك از اضلاع آن مساوی نصف قطری از وجه مکعب می‌باشد؛ مثلاً RS مساوی است با نصف CH. ضمناً بسهولت ثابت می‌شود که

زوایای شش ضلعی نامبرده نیز باهم برابرند و در نتیجه شش ضلعی مذکور منتظم است.

ثالثاً: صفحه شش ضلعی عمود است بر وسط قطر AG؛ زیرا که مطابق آنچه در قسمت ب بیان شده، قطعه II' از قطر AG (ش ۱۱)، تصویر مشترك ۶ یالی از مکعب است که هیچیک با قطر AG نقطه مشترك ندارند؛ حال اگر اوساط این يالها را که همان رؤوس شش ضلعیند بر قطر AG تصویر کنیم، وسط II' یا مرکز مکعب، تصویر مشترك رؤوس شش ضلعی خواهد بود؛ و چون شش ضلعی مستوی است، لازم است صفحه آن که بر وسط قطر AG می‌گذرد، بر این قطر عمود باشد.

ABCD بدست آید؛ و چون در نقطه A صفحه‌ای بر Δ عمود کنیم، مربع ABCD در این صفحه خواهد بود؛ پس کافی است که در صفحه مذکور، مربعی به قطر AC بسازیم تا دو رأس B و D پیدا شوند و بعد از آن مکعب را تکمیل کنیم.

تمرین

۱- نقاط a_1 و c_1 مفروضند. مطلوب است نمایش هرمی که رأسش نقطه a_1 و قاعده‌اش مربعی باشد که $a_1 c_1$ قطر آن بوده رأس سومش روی صفحه مقایسه واقع باشد (شرط امکان؟).

۲- شش‌ضلعی منتظمی به ضلع ۳ سانتیمتر که واقع است در صفحه مفروض P و يك ضلع آن بر صفحه مقایسه منطبق است، قاعده منشور مایلی است که یالهای آن به طول معلوم l و با اضلاع AB و AF قاعده زاویه 75° می‌سازند؛ منشور را بسازید.

۳- قاعده هرم مثلث القاعده‌ای در صفحه مقایسه مثلثی به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ است؛ مطلوب است نمایش هرم در صورتی که یالهای جانبی آن ۸ و ۹ و ۱۰ باشند.

۴- مثلث abc واقع در صفحه مقایسه قاعده يك هرم است؛ مطلوب است نمایش آن هرم، در صورتی که کنج رأس چهارم هرم، سه قائمه باشد.

۵- شش‌ضلعی منتظمی در صفحه مفروض P است و مرکز آن، نقطه‌ای به رقوم ۵ است و یکی از رؤوس آن، نقطه‌ای است به رقوم ۳؛ اولاً مطلوب است نمایش این مسدس. ثانیاً از مرکز مسدس، عمودی بر صفحه آن اخراج کرده و بر روی عمود طولی برابر ۱۰ سانتیمتر جدا کنید و انتهای آن را رأس هرمی که قاعده‌اش شش‌ضلعی مذکور باشد، اختیار کرده هرم را نمایش دهید.

۶- چهارضلعی ABCD واقع در صفحه مقایسه، قاعده منشور مایلی است که یالهای جانبی آن با صفحه مقایسه زاویه 30° درجه می‌سازند و تصویر افقی یالی که بر نقطه D می‌گذرد، با BD زاویه 45° درجه تشکیل می‌دهد؛ منشور را رسم کنید؛ طول یال منشور، ۵ است.

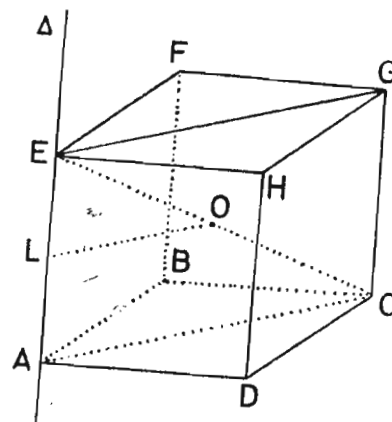
۸- مسئله - مطلوب است نمایش مکعبی که مرکز و محمل یکی از یالهای آن معلوم باشند.

حل هندسی - هرگاه ABCDEFGH مکعب و O مرکز آن

باشد (ش ۱۴) و در صفحه قطری AEGC عمود OL را بر Δ ، محمل یال AE، فرودآوریم، در مثلث قائم الزاویه ACE چنین خواهیم داشت:

$$\frac{LE}{LO} = \frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AE\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$LE = LO \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{پس:}$$



(ش ۱۴)

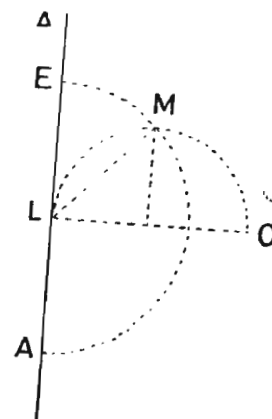
برای تعیین طولی مساوی AE، از راه ترسیم، کافی است که عمود OL را بر Δ فرود آورده به قطر آن دایره‌ای بزنیم (شکل ۱۵) و از وسط LO خطی بر آن عمود کنیم تا دایره را در M قطع کند؛

به این ترتیب، خواهیم داشت:

$$LM = LO \frac{\sqrt{2}}{2}$$

اگر به مرکز L و شعاع LM قوسی بزنیم تا Δ را در A و E قطع کند، AE یال مکعب است.

بعد از تعیین A و E، قرینه E را نسبت به O پیدا می‌کنیم تا رأس C از مکعب و در نتیجه قطر AC از مربع



(ش ۱۵)

۷- نقاط a_4 و b_4 داده شده اند (ab برابر ۳ است)؛ دو نقطه مذکور، رؤوس مثلث متساوی الاضلاعی هستند که رقوم رأس سوم آن، ۳ است؛ مثلث را بسازید و بر روی آن، یک چهاروجهی منتظم بنا کنید.

۸- چهاروجهی منتظم $SMNP$ را با این مشخصات بسازید: M و N داده شده اند و وجه SMN با صفحه مقایسه زاویه 60° می سازد.

۹- در مکعب $ABCDEFGH$ قطر AG اقیهه ای به رقوم ۵ است و تصاویر A و G داده شده اند؛ در صورتی که: الف - یکی از قطرهای دیگر جسم نیز افقی باشد، ب - یکی از یالهایی که بر A می گذرند افقی باشد، مکعب را بسازید.

۱۰- دو نقطه a_1 و b_1 به فاصله حقیقی ۵ از یکدیگر اختیار کنید؛ این دو نقطه دو رأس مربعی هستند که صفحه اش با صفحه مقایسه زاویه 75° می سازد؛ رقوم دو رأس دیگر از رقوم a_1 و b_1 کمتر است. بر روی مربع، مکعب مستطیلی بسازید که طول قطرش مساوی ۸ باشد.

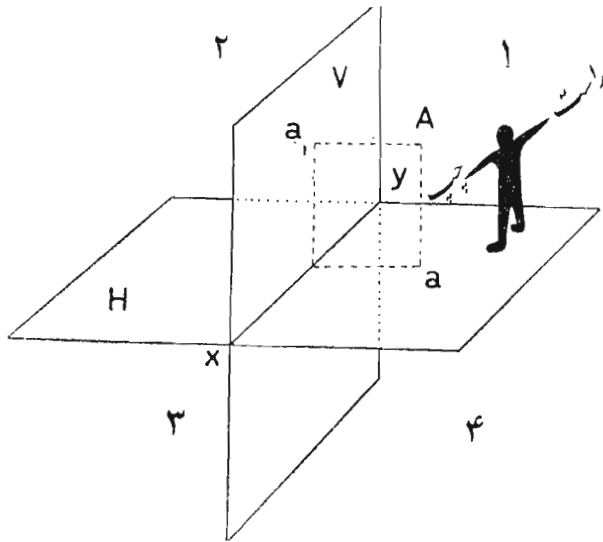
۱۱- m_2 و n_2 و p_2 ($mn=4$ و $pn=5$ و $mp=6$) سه رأس هرمی هستند که یال SM آن با MN و MP زوایای 60° می سازد؛ ارتفاع هرم ۴ و رأس S بالای صفحه MNP است؛ ملخص این هرم را کامل کنید.

۱۲- سه نقطه a_5 و b_5 و c_5 رؤوس مثلثی هستند به اضلاع $ab=3$ و $ac=6$ و $bc=5/5$ ؛ این مثلث قاعده هرمی است که فرجه های AB و BD و DC آن بترتیب ۶۰ و ۴۵ و ۳۰ درجه اند؛ هرم را بسازید. رأس هرم بالای صفحه مقایسه است.

بخش دوم

هندسه تریپیمی

مانند میز باید قرار داد ، صفحه تصویر H را ، که در حقیقت همان صفحه شکل است ، موازی با صفحه افقی حقیقی فرض می کنند و آن را **صفحه افقی تصویر** می نامند و صفحه دیگر V را که بر H عمود است ، **صفحه قائم تصویر** می گویند . در حالی که H با افق موازی نباشد . باز اصطلاح صفحات افقی و قائم برای صفحات تصویر بکار می رود .



(ش ۱)

فصل مشترك صفحات افقی و قائم تصویر را **خط زمین** یا **خط الارض**

می نامند و آن را با xy نمایش می دهند . برای نوشتن حروف x و y همیشه به این قاعده عمل می کنیم : اگر شخصی روی صفحه افقی و روبروی صفحه قائم بایستد (شکل ۱) ، در انتهای خط زمین که طرف چپ اوست ، x و در انتهایی که طرف راست اوست ، y می نویسیم .

صفحه افقی تصویر ، فضا را به دو ناحیه تقسیم می کند که یکی بالا و دیگری زیر آن است ؛ همچنین به وسیله صفحه قائم نیز فضا به دو ناحیه

نقطه

مقدمه

۱ - قسمتی از هندسه که در آن هر نقطه به وسیله تصاویرش بر دو صفحه نمایش داده می شود ، **هندسه ترسیمی** نام دارد . هندسه ترسیمی ، بخصوص ، مورد نیاز مهندسان و معماران است ؛ اما در زندگی عادی هم از آن استفاده می توان کرد ؛ مثلاً اگر بخواهید میزی را بامشخصات خاصی به نجارسفارش دهید ، به جای اینکه مدتی وقت خود را صرف توضیح جزئیات میز کنید ، کافی است که نقشه دقیق میز را به کمک قواعد هندسه ترسیمی رسم کرده در اختیار او قرار دهید . يك نقشه خوب از چند صفحه توضیحات بهتر است . هندسه ترسیمی در حقیقت مجموعه قواعدی است که به کمک آنها می توان اجسام فضایی یعنی سه بعدی را ، آنچنانکه در حقیقت هستند ، بر روی دو صفحه مستوی نمایش داد ، یا مسائل هندسه فضایی را به کمک قواعد هندسه مسطحه حل و رسم کرد .

این قسمت از ریاضیات عملی بسیار سهل و جالب و شیرین است و اگر با نظم و دقت فرا گرفته شود تسلط ، یافتن بر آن کاری است آسان .

نمایش نقطه

۲ - **صفحات تصویر** - دو صفحه عمود بر هم H و V (شکل ۱)

را در نظر گرفته هر نقطه را به وسیله تصاویرش بر آن دو صفحه مشخص می سازیم .

شرط اصلی بین صفحات تصویر ، عمود بودن آنها بر یکدیگر است . چون معمولاً تصویر یا نقشه را برای مطالعه ، روی سطحی افقی

جلو و عقب تقسیم می‌شود؛ بنابراین، از تقاطع دو صفحه تصویر، فضا به چهار ناحیه تقسیم می‌شود؛ مطابق قرار داد، ناحیه بالای صفحه افقی و جلو صفحه قائم (نسبت به ناظر مزبور) را ناحیه اول و نواحی دیگر را، مطابق شکل ۱، نواحی دوم و سوم و چهارم می‌نامند.

۳- تصاویر نقطه - هرگاه a و a_1 (شکل ۲) تصاویر نقطه A

بر صفحات افقی و قائم باشند،

a را تصویر افقی و A و a_1 را

تصویر قائم A گویند.

صفحه‌ای که بر دو خط

Aa و Aa_1 بگذرد، بر هر دو

صفحه تصویر عمود است و

در نتیجه بر فصل مشترکشان،

xy ، هم عمود می‌شود و xy

را در α و صفحات تصویر را

(ش ۲)

در αa_1 و αa قطع می‌کند که هر دو بر xy عمودند.

صفحه aAa_1 ، و بطور کلی هر صفحه عمود بر خط زمین را صفحه

نیمرخ می‌نامند.

فصل مشترکهای هر صفحه نیمرخ با صفحات تصویر، بر xy عمودند.

از روی تصاویر a و a_1 می‌توان به نقطه A رسید؛ به این ترتیب

که از a عمودی بر صفحه افقی و از a_1 عمودی بر صفحه قائم اخراج می‌کنیم؛ این دو عمود که در یک صفحه نیمرخ واقعند، یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که همان نقطه‌ای است که a و a_1 تصویرهای آنند.

۴- بُعد و ارتفاع نقطه - فاصله هر نقطه از صفحه قائم تصویر را

بُعد و فاصله‌اش از صفحه افقی تصویر را ارتفاع آن نقطه گویند.

از مستطیل $Aa_1\alpha a$ (شکل ۲) سهولت فهمیده می‌شود که:

بعد هر نقطه مساوی است با فاصله تصویر افقی آن از خط زمین و ارتفاع هر نقطه مساوی است با فاصله تصویر قائمش از خط زمین.

بعد نقطه را با حرف c و ارتفاعش را با حرف h (۱) نمایش می‌دهیم.

در گفتن و نوشتن، معمولاً بُعد را پیش از ارتفاع می‌آوریم.

صفحه افقی تصویر، مبدأ ارتفاعهاست؛ ارتفاع نقاط واقع در آن

مساوی صفر است و ارتفاع نقطه‌ای را که در بالا یا در زیر آن باشد، بترتیب

مثبت یا منفی منظور می‌داریم.

صفحه قائم تصویر، مبدأ بعدهاست؛ بر حسب آنکه نقطه‌ای جلو

صفحه قائم یا روی آن یا عقب آن باشد، بترتیب بعدش مثبت یا صفر یا

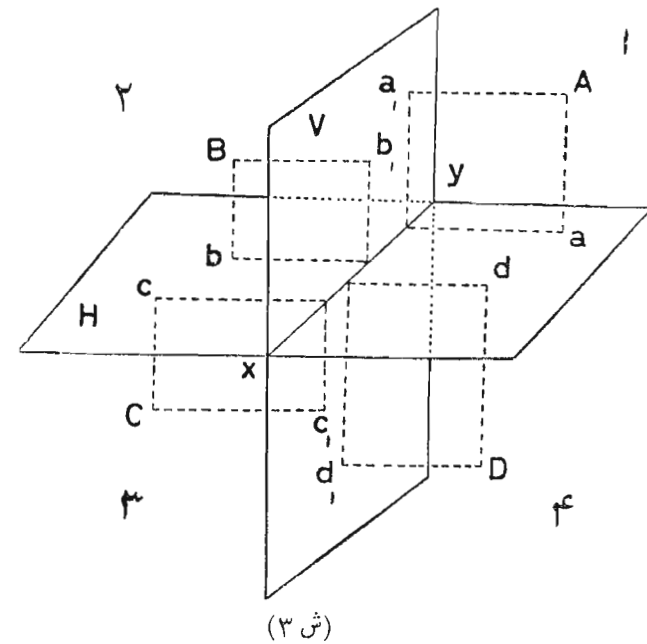
منفی گفته می‌شود.

جدول زیر، علامت بُعد و ارتفاع نقاط را در هر یک از نواحی

چهارگانه نشان می‌دهد:

ناحیه	علامت بُعد	علامت ارتفاع	مثال در شکل ۳
اول	+	+	نقطه A
دوم	-	+	نقطه B
سوم	-	-	نقطه C
چهارم	+	-	نقطه D

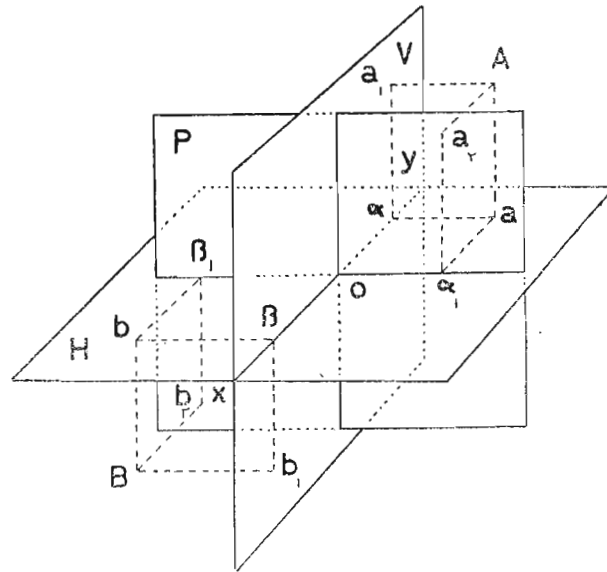
۱- حرف اول éloignement (بُعد) و h حرف اول hauteur (ارتفاع) است.



۵- تبصره - با مختصری توجه به شکل ۳، فهمیده می‌شود که بعد و ارتفاع، برای مشخص کردن نقطه کافی نیستند؛ زیرا که اگر مثلاً فرض کنیم بعد و ارتفاع نقطه A مساوی e و h باشند، این اعداد، بعد و ارتفاع تمام نقاط واقع بر خطی هستند که از A به موازات xy کشیده شود؛ پس نقاط بیشماری به بعد e و ارتفاع h وجود دارند. برای تعیین يك نقطه مشخص، علاوه بر بعد و ارتفاع آن، فاصله‌اش از صفحه معین دیگری هم باید در دست باشد^۱؛ این صفحه، معمولاً صفحه نیم‌رخ

۱- در جبر و مقابله هم گفته می‌شود که نقطه در فضا به وسیله فواصل از سه صفحه متقاطع و عمود برهم، به نام صفحات مختصات، مشخص می‌شود؛ این فواصل را طول و عرض و ارتفاع نقطه می‌گویند و به x و y و z نمایش می‌دهند.

مانند P (شکل ۴) اختیار می‌شود که در حدود xy این خط را در نقطه‌ای مانند o قطع کند. فاصله نقطه را از این صفحه، طول می‌نامیم. بر



(ش ۴)

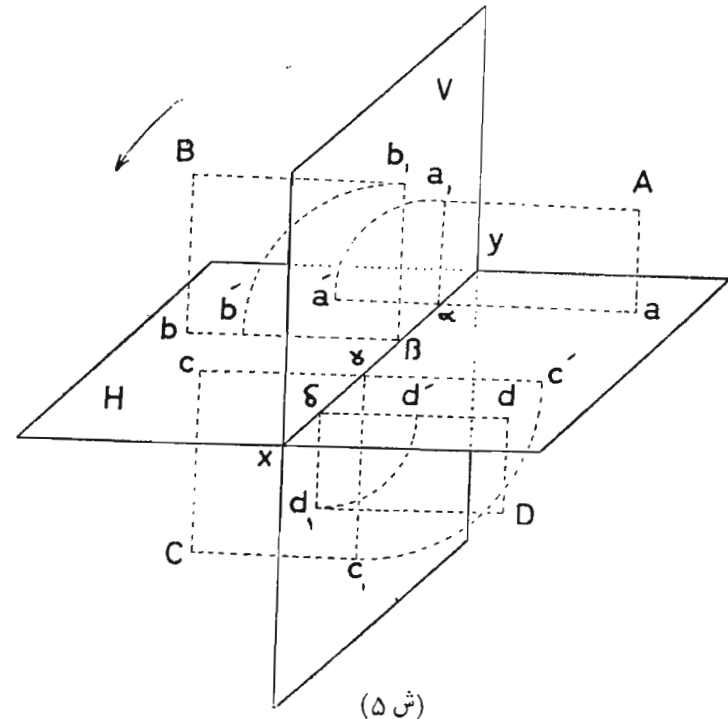
حسب قرارداد، طول نقاطی که در طرف راست صفحه P واقعند، مثبت و آنهایی که در طرف چپ آن قرار می‌گیرند، منفی اختیار می‌شوند. طول و بعد و ارتفاع را مختصات نقطه می‌نامیم.

در شکل ۴، مختصات نقطه A، هر سه مثبتند؛ طول آن oa ، بعد آن aa_1 و ارتفاع aa_1 است. مختصات B هر سه منفی هستند. در نوشتن مختصات، از چپ به راست، اول طول سپس بعد و در آخر ارتفاع را می‌نویسیم.

تمرین ۱ - صفحات افقی و قائم و نیمرخ را مانند شکل ۴ رسم کنید و نقاط زیر را مشخص سازید :

$$\begin{array}{ll} A (۵ و ۳ و ۲) & \text{(یعنی به طول ۲ و بعد ۳ و ارتفاع ۵)} \\ B (-۱ و ۲ و ۴) & C (۳ و ۲ و ۴) \\ D (-۲ و ۱ و -۴) & E (۰ و ۰ و ۴) \\ F (۴ و ۵ و ۰) & G (۰ و -۱ و ۰) \end{array}$$

۶ - تسطیح صفحه قائم تصویر بر صفحه افقی - برای نمایش تصاویر ، صفحه ای جز یک صفحه مانند صفحه کاغذ یا تخته ، در اختیار نداریم ؛ پس باید هر دو تصویر ، یعنی تصاویر افقی و قائم را بر روی یک صفحه نمایش دهیم ؛ برای این کار ، پس از آنکه تصاویر افقی و قائم را بدست آوردیم ، صفحه قائم را در حول xy به اندازه ۹۰° در جهت مثبت مثلثاتی دوران می دهیم تا بر صفحه افقی منطبق شود (شکل ۵) .



این عمل را تسطیح صفحه قائم بر صفحه افقی می گویند . پس از تسطیح ، نیمه فوقانی صفحه قائم بر نیمه مؤخر صفحه افقی ، و نیمه تحتانی صفحه قائم بر نیمه مقدم صفحه افقی منطبق می شود .

با توجه به اینکه حروف x و y را بترتیب در طرف چپ و راست ناظری نوشته ایم که بالای صفحه افقی و رو به صفحه قائم ایستاده باشد ، نیمه مقدم صفحه افقی را زیر خط زمین و نیمه مؤخر آن را بالای خط زمین اصطلاح می کنیم .

حال اگر در شکل ۵ مثلاً نقطه A را در نظر بگیریم ، a_1 تصویر قائمش ، پس از تسطیح صفحه قائم بر صفحه افقی ، به وضع a' در می آید ؛ a' را تصویر قائم A می گوئیم . با توجه به اینکه a_1 در حال دوران همیشه بر xy عمود می ماند و پس از انطباق بر صفحه افقی هم که به وضع $a'a'$ در می آید بر xy عمود است ، نتیجه می گیریم که :

الف - a' و a بر روی یک خط عمود بر xy واقعند ؛ این خط را خط رابط می گویند ، پس :

الف - تصاویر افقی و قائم هر نقطه بر روی یک خط رابط واقعند .
ب - فاصله تصویر افقی نقطه از خط زمین مساوی بعد نقطه و فاصله تصویر قائم آن از خط زمین مساوی ارتفاع نقطه است .

ب - تصویر افقی هر نقطه واقع در نواحی اول یا چهارم ، یعنی نقاطی که جلو صفحه قائمند و بعدشان مثبت است ، زیر خط زمین واقع می شود و تصویر افقی هر یک از نقاط نواحی دوم و سوم ، که بعدشان منفی است ، بالای خط زمین می افتد .

ج - تصویر قائم نقاط واقع در نواحی اول و دوم ، که ارتفاعشان مثبت است ، بالای xy واقع می شود و تصاویر قائم نقاط واقع در ناحیه های سوم و چهارم ، که ارتفاعشان منفی است ، زیر xy می افتند .

قسمتهای ب و ج را به این صورت خلاصه می کنیم :

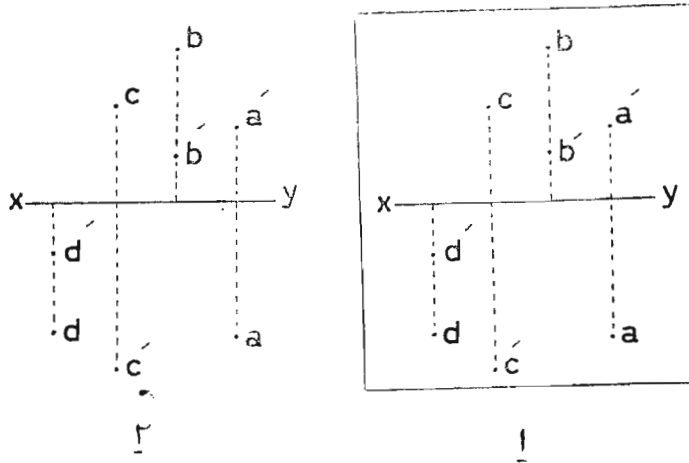
زیر خط زمین ، برای نمایش بعدهای مثبت و بالای آن ، برای نمایش بعدهای منفی بکار می رود ؛ و نیز بالای xy ، برای ارتفاعهای مثبت و زیر آن ، برای نمایش ارتفاعهای منفی است .

وضع صفحه نسبت به خط زمین	علامت بُعد	علامت ارتفاع
زیر xy	+	-
بالای xy	-	+

بطوریکه دانسته شد ، هر نقطه دارای یک تصویر افقی و یک تصویر قائم است و این دو تصویر بر روی یک رابط قرار دارند . برای اینکه از دو تصویر نقطه به خود نقطه برسیم ، صفحه قائم را که پس از تسطیح ، بر صفحه افقی واقع شده است ، در حول xy به اندازه 90° در جهت منفی مثلثاتی دوران می دهیم تا به وضع عمود بر صفحه افقی در آید و a' به وضع a_1 (شکل ۵) قرار گیرد ؛ آنگاه مطابق آنچه در قسمت آخر شماره ۳ همین فصل گفتیم ، عمل می کنیم تا A بدست آید .

۷ - پس از تسطیح صفحه قائم (شکل ۵) بر صفحه افقی ، شکل

حاصل بر روی صفحه کاغذ (یا تخته) به صورت شکل (۱-۶) خواهد بود ؛ اما به ملاحظه اینکه صفحه محدود نیست ، از رسم مستطیل حدود شکل خودداری کرده و به رسم xy اکتفا می کنیم (شکل ۲-۶) .
نقطه را با دو حرف a و a' می خوانیم ، مانند نقطه aa' ؛ یا



(ش ۶)

با یک حرف بزرگ ، مانند نقطه A . در هندسه ترسیمی هر وقت هم که نقطه را با حرف بزرگ بخوانیم ، با تصاویرش نمایش می دهیم ؛ مثلاً می گوئیم نقطه B یا نقطه C ولی آنها را به bb' یا cc' نمایش می دهیم .
مثال - در شکل ۷ نقطه aa' در ناحیه اول است ، زیرا که بعد و ارتفاع مثبت دارد ؛ ee' روی صفحه قائم و بالای صفحه افقی است ؛ ff' روی صفحه افقی و جلو صفحه قائم و gg' بر خط زمین واقع است .
۸ - نقاط واقع بر صفحات نیمساز فرجه - صفحاتی که فرجه های بین صفحات تصویر را نصف کنند ، **نیمساز فرجه** نامیده می شوند .
نیمساز فرجه اول ، فرجه های نواحی اول و سوم را نصف می کند ؛

نیمساز فرجه دوم ، منصف فرجه‌های نواحی دوم و چهارم است .

چون نقاط واقع بر هر صفحه نیمساز فرجه ، از دو وجه فرجه به يك فاصله اند ، بعد و ارتفاع هر يك از این نقاط ، از حیث قدر مطلق متساویند .

هر نقطه که بر نیمساز فرجه اول باشد ، بعد و ارتفاعش متساوی و متحدالعلامه اند ، پس تصاویرش نسبت به خط زمین قرینه یکدیگرند (شکل ۷ ، hh' و ii')؛

بعد و ارتفاع هر نقطه واقع بر نیمساز فرجه دوم متساوی و مختلف - العلامه اند ، پس تصاویر آن نقطه برهم منطبقند (شکل ۷ ، jj' و kk') .

۹- ملخص - مجموعه

تصاویر قائم و افقی يك شكل و رابطها (و خط

زمین) را ملخص یا اپور

شكل می گویند .

(ش ۷)

تمرین ۴- مطلوب است رسم ملخص این نقاط :

الف - نقطه A به طول ۲ که بعد و ارتفاعش ۲ و ۵ باشند .

ب - نقطه B به طول ۲ - واقع در ناحیه سوم به فاصله ۴ از خط زمین

که قدر مطلق بعدش ۴ باشد .

ج - نقطه C به طول ۲ واقع در صفحه قائم که به فاصله ۴ از خط زمین

و بالای آن باشد .

۱۵- قرار داد - در ملخصها ، برای رسم خطوط ، نکات زیر را

مراعات باید کرد :

الف - خطوط اصلی مرئی با خط تمام و خیلی ظریف (---) رسم شوند .

ب - خطوط جواب مسائل با خط تمام و درشت تر (—) رسم شوند .

ج - خطوط غیر مرئی با نقطه چین (.....) کشیده شوند .

د - خطوط رابط با مرکب قرمز یا آبی خط چین و سایر خطوط با سیاه رسم شوند ؛ هر جا که رسم را بطها با مرکب رنگین ممکن نباشد ، آنها را با خط چین (---) رسم کنید .

ه - خطوط فرعی عموماً با خط چین رسم شوند .

و - خطوط غیر اصلی ولی مهم با خط و نقطه (— . — . — . —) کشیده شوند .

خلاصه مطالب مهم

۱- هر نقطه به وسیله تصاویرش بر دو صفحه ، موسوم به صفحات تصویر ، مشخص می شود .

۲- شرط اصلی بین صفحات تصویر ، عمود بودن آنها بر یکدیگر است .

۳- یکی از صفحات تصویر را افقی و دیگری را قائم می نامند .

۴- فصل مشترك صفحات افقی و قائم تصویر ، خط زمین است . برای اسم گذاری خط زمین ، x را طرف چپ و y را طرف راست می نویسند .

۵- دو تصویر يك نقطه بر روی يك رابط قرار دارند .

۶- فاصله نقطه از صفحه افقی ، برابر فاصله تصویر قائم آن از خط

زمین است و ارتفاع نقطه نام دارد . فاصله نقطه از صفحه قائم ، برابر فاصله

تصویر افقی آن از خط زمین است و بعد نقطه نام دارد .

۷- از تقاطع صفحات تصاویر، فضا به چهار ناحیه تقسیم می‌شود. در ناحیه اول که بالای افق و جلوه صفحه قائم است، بعد و ارتفاع مثبت است؛ در ناحیه دوم، یعنی بالای افق و عقب صفحه قائم، بعد منفی و ارتفاع مثبت است؛ در ناحیه سوم، بعد و ارتفاع هر دو منفی، و در ناحیه چهارم، بعد مثبت و ارتفاع منفی است.

۸- دو تصویر هر نقطه واقع در صفحه نیمساز فرجه اول، نسبت به خط - زمین قرینه یکدیگرند.

۹- دو تصویر هر نقطه واقع در صفحه نیمساز فرجه دوم، بر یکدیگر منطبقند.
۱۰- فاصله هر نقطه از خط زمین مساوی وتر مثلث قائم الزاویه‌ای است که يك ضلعش مساوی بعد نقطه و ضلع دیگرش مساوی ارتفاع نقطه باشد.

تمرین

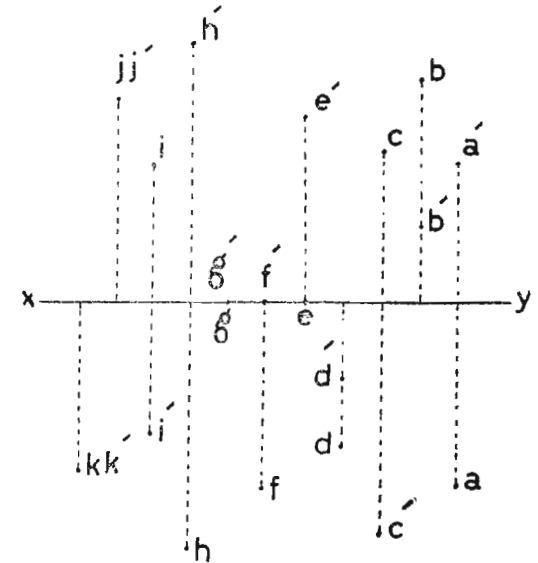
۶- در شکل ۸ معین کنید که هر نقطه در کدام ناحیه یا روی کدام صفحه است و معین کنید که هر يك بین یکی از صفحات نیمساز فرجه و صفحه افقی است یا بین نیمساز فرجه و صفحه قائم قرار دارد.

۷- نقطه‌ای در روی

نیمساز فرجه اول پیدا کنید که فاصله‌اش از خط زمین ۶ باشد؛
عده جوابها؟

۸- نقطه aa' را در ناحیه اول اختیار کرده وضع آن را، نسبت به صفحات تصاویر و نیمساز فرجه‌ها، بسنجید.

۹- عین مسئله ۸ در مورد نقطه‌ای واقع در ناحیه چهارم.



(ش ۸)

۱۰- نقطه ll' در صفحه قائم تصویر داده شده است؛ قرینه آن را نسبت به صفحه افقی تصویر بدست آورید.

۱۱- نقطه mm' در صفحه افقی تصویر داده شده است؛ قرینه آن را نسبت به صفحه قائم تصویر بدست آورید.

۱۲- نقطه bb' داده شده است؛ قرینه‌هایش را نسبت به صفحات افقی و قائم تصویر بدست آورید.

۱۳- نقطه cc' در دست است؛ قرینه آن را نسبت به خط زمین معین کنید.

۱۴- نقطه‌ای داده شده است؛ قرینه آن را نسبت به صفحه نیمساز فرجه اول بدست آورید.

۱۵- نقطه‌ای داده شده است؛ قرینه آن را نسبت به صفحه نیمساز فرجه دوم معین کنید.

۱۶- مجموع بعد و ارتفاع نقطه‌ای و فاصله آن از خط زمین در دست است؛ تصاویر آن را رسم کنید در صورتی که طول آن (فاصله‌اش از صفحه نیمرخ عمود بر وسط xy) ۳ باشد.

۱۷- تفاضل بعد و ارتفاع يك نقطه و فاصله آن از خط زمین و طول آن معلوم است؛ نقطه را بدست آورید.

۱۸- حاصل ضرب بعد و ارتفاع نقطه‌ای و فاصله آن از خط زمین داده شده‌اند؛ نقطه را بدست آورید.

۱۹- نظیر مسئله ۱۸ را در صورتی که به جای حاصل ضرب، خارج-قسمت معلوم باشد، حل کنید.

۲۰- فاصله دو نقطه A (۲ و ۵) و B (۲ و ۱) را از یکدیگر حساب کنید.

فصل دوم

خط

۱ - قضیه - تصویر خط مستقیم خطی است مستقیم .

برهان - خط Δ و صفحه تصویر P مفروضند (شکل ۱). نقطه‌ای

مانند A از خط را در a

تصویر می‌کنیم؛ صفحه‌ای

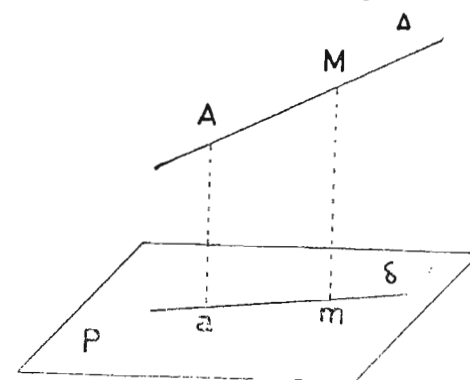
که بر Δ و Aa می‌گذرد،

صفحه P را در امتداد خط

مستقیمی مانند δ قطع می‌کند؛

صفحه ΔAa تنها صفحه‌ای

است که بر Δ می‌گذرد و بر P



(ش ۱)

عمود است، و اگر از هر نقطه مانند M واقع بر Δ عمودی بر P فرود

آوریم، این عمود در صفحه ΔAa واقع می‌شود و صفحه P را در نقطه‌ای

مانند m ، تصویر M ، واقع بر δ قطع می‌کند؛ یعنی تصاویر نقاط

مختلف خط Δ بر صفحه P ، روی δ واقع می‌شوند؛ پس تصویر خط Δ

خطی است مستقیم منطبق بر δ .

۲- تعریف- صفحه‌ای را که بر Δ بگذرد و بر صفحه تصویر عمود

-۱۳۱-

باشد، صفحه مصور Δ

می‌نامند.

۳- تصاویر يك خط

در هندسه ترسیمی -

هرگاه بر خطی مانند

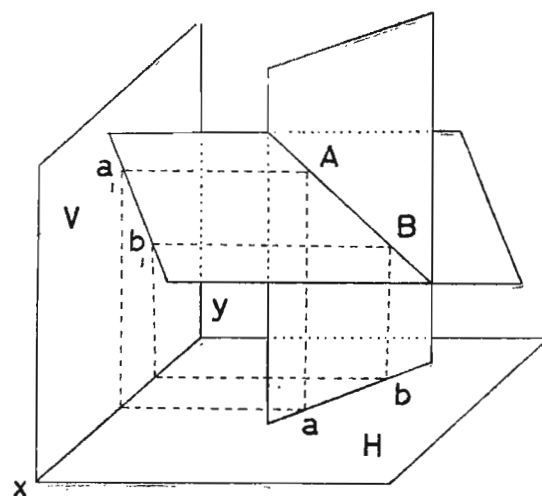
AB (شکل ۲) دو صفحه

عمود بر صفحات افقی

وقائم تصویر مرور دهیم

تا آنها را بترتیب در

ab و a_1b_1 قطع کنند،



(ش ۲)

ab و a_1b_1 را تصویرهای افقی وقائم AB می‌نامیم. از دو صفحه

نامبرده که بر AB می‌گذرند، آن‌را که بر صفحه افقی تصویر عمود است،

صفحه مصور قائم و دیگری را که بر صفحه قائم تصویر عمود است،

صفحه مصور منتصب می‌نامند.

بدیهی است که تصاویر هر نقطه که بر خطی واقع باشد، بر تصاویر آن

خط واقع می‌شوند.

۴- از روی ab و a_1b_1 ، تصویرهای يك خط، می‌توان خود خط

را به این نحو معین کرد: بر ab و a_1b_1 دو صفحه بترتیب عمود بر H

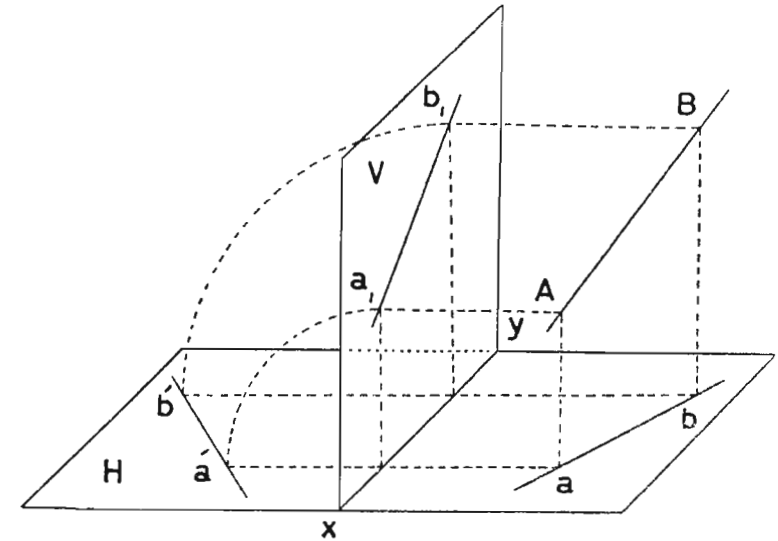
و V مرور دهیم (شکل ۲)، این دو صفحه غیرمتوازی فصل مشترکی دارند

که همان خط مطلوب است، یعنی خطی است که ab و a_1b_1 تصاویرهای

افقی وقائم آن هستند.

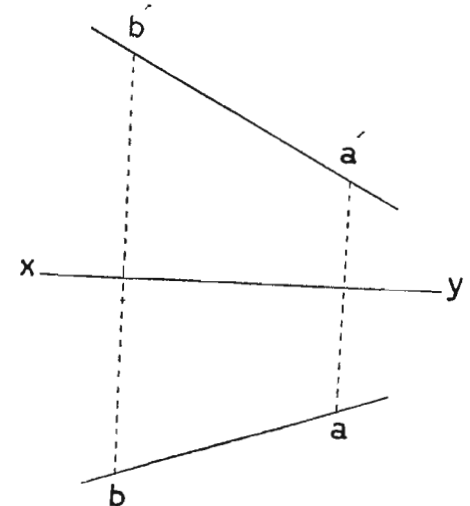
۵- برای رسم ملخص خط مستقیم، صفحه قائم تصویر را در حول

بر صفحه افقی تسطیح می‌کنیم (شکل ۱-۳)، سپس آن را به صورت شکل ۲-۳ نمایش می‌دهیم.



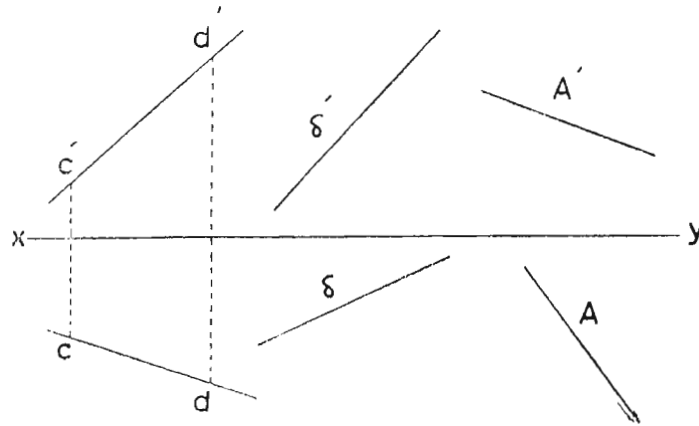
۱

برای اینکه از ملخص خط (شکل ۲-۳)، به خود خط برسیم، باید صفحه قائم را که بر صفحه افقی تسطیح شده است، در حول xy به اندازه 90° در جهت منفی مثلثاتی دوران دهیم تا به صورت شکل ۱-۳ در آید؛ آنگاه به ترتیبی که در شماره ۴ همین فصل گفتیم عمل کنیم تا AB نتیجه شود؛ پس



(ش ۳)

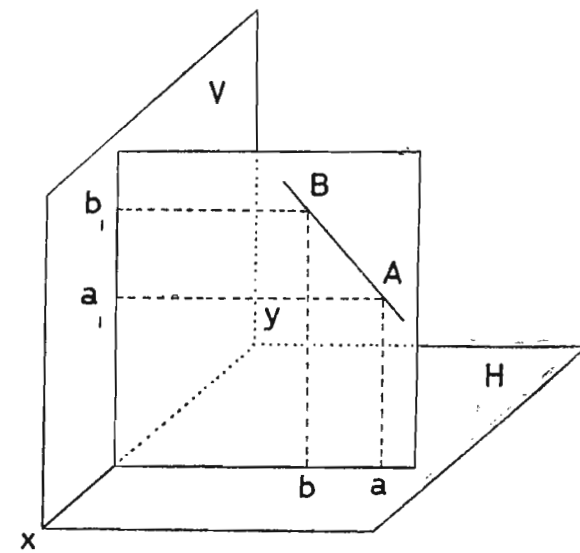
خط، به وسیله دو تصویرش مشخص می‌شود؛ یعنی يك تصویر افقی و يك تصویر قائم، فقط يك خط را نمایش می‌دهند. تصویر افقی خط را با يك حرف بزرگ لاتین و تصویر قائم آن را با همان حرف و با علامت (') می‌نویسیم، مانند خط AA' (شکل ۴).



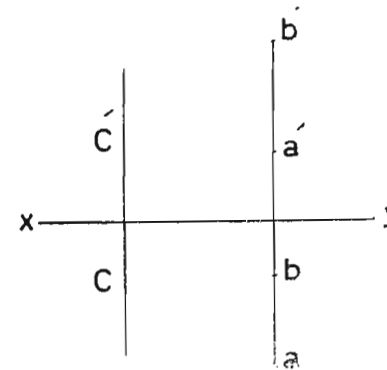
(ش ۴)

گاهی به جای حرف بزرگ، حرف کوچک بکار می‌برند، مانند $cdc'd'$ و گاهی هم خط را با دو نقطه می‌خوانند، مانند خط $cdc'd'$ (شکل ۴).

۶- حالت استثنایی - اگر صفحات مصور قائم و منتصب خطی مبدل به يك صفحه نیمرخ شوند (شکل ۵)، تصاویر قائم و افقی خط، بر امتداد یکدیگر قرار می‌گیرند و بر xy عمود می‌شوند (شکل ۶، CC') و C و C' در حقیقت، تصاویر افقی و قائم هر خطی هستند که در صفحه نیمرخ مذکور باشد، پس با آنها يك خط مشخص نمی‌شود؛ در این صورت، برای مشخص ساختن يك خط، باید دو نقطه آن داده شوند، مانند خط $aba'b'$ (شکل ۶)؛ زیرا که بر دو نقطه aa' و bb' فقط يك خط می‌گذرد.



(ش ۵)

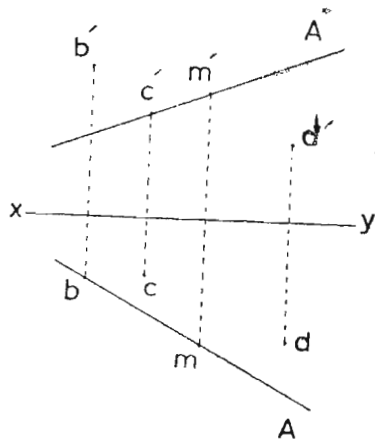


(ش ۶)

خطی را که تصاویرش بر خط زمین عمود باشند، یعنی در یک صفحه نیمرخ باشد، خط نیمرخ می نامند، پس:

هر خط به وسیله دو تصویرش مشخص می شود جز خط نیمرخ که باید دو نقطه اش در دست باشند.

۷- مسئله - تصویر افقی نقطه M از خط AA' داده شده است، تصویر قائم آن را بدست آورید (شکل ۷).



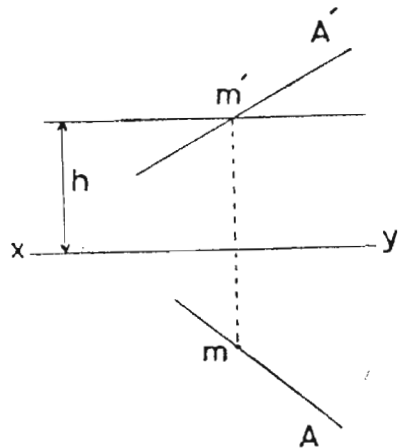
(ش ۷)

چون M روی AA' است، تصویر قائمش از طرفی بر روی A' و از طرف دیگر بر روی رابط نقطه m است؛ پس m'، نقطه تلاقی دو خط مذکور، تصویر قائم M است.

تبصره - این قاعده در مورد خط نیمرخ، که تصاویرش در یک امتداد و بر xy عمودند، جاری نیست و در شماره ۲۳ همین فصل به شرح آن خواهیم پرداخت.

تمرین ۱ - تصاویر خطی و تصویر قائم يك نقطه از آن داده شده است؛ تصویر افقی این نقطه را بدست آورید.

۸- مسئله - بر روی خط AA' نقطه ای به ارتفاع h معین کنید.



(ش ۸)

تصویرهای قائم تمام نقاطی که ارتفاعشان h است، بر روی خطی واقعند که به موازات خط زمین و به فاصله h از آن رسم شود؛ این خط، A' را در نقطه m' و رابطی که از m' می گذرد، A را در نقطه m

قطع می کند (شکل ۸) و mm' نقطه مطلوب است.

تمرین ۲- در شکل ۷ تحقیق کنید که سه نقطه bb' و cc' و dd' بر روی خط AA' هستند یا نه .

تمرین ۳- بر روی خط مفروض : الف- يك نقطه به بعد e معین کنید .
ب- يك نقطه به ارتفاع صفر بیاوید (این نقطه را اثر افقی خط می گویند) .
ج- يك نقطه به بعد صفر تعیین کنید (اثر قائم خط) .

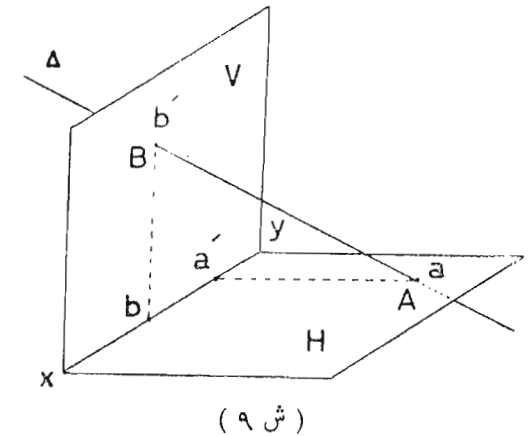
تمرین ۴- تحقیق کنید که آیا می توان بر روی يك خط مفروض، نقطه ای به ارتفاع h و بعد e تعیین کرد ؟

تمرین ۵- يك خط در صفحه افقی تصویر و يك خط در صفحه قائم تصویر رسم کنید .

۹- آثار خط -

اثر افقی - اثر قائم -

فصل مشترکهای خط را با صفحات تصویر ، آثار آن می نامیم ؛ فصل مشترك خط با صفحه افقی تصویر ، اثر افقی و با صفحه قائم تصویر ،



(ش ۹)

اثر قائم آن است.

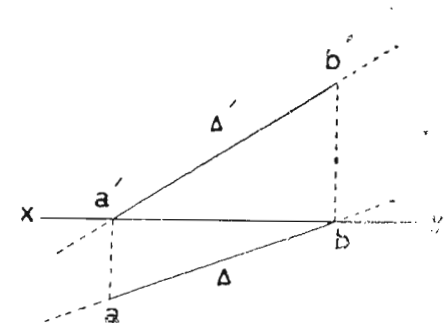
در شکل ۹ نقطه A (یا

aa') اثر افقی خط Δ و نقطه B

(یا bb') اثر قائم Δ است .

۱۰- ملخص - در شکل

۱۰ برای بدست آوردن اثر



(شکل ۱۰)

افقی خط $\Delta\Delta'$ ، تصویر قائم آن را امتداد داده ایم تا خط زمین را در a' قطع کرده است ؛ a' تصویر قائم و a تصویر افقی اثر افقی خط $\Delta\Delta'$ است . b تصویر افقی اثر قائم خط ، محل برخورد تصویر افقی آن است با خط زمین ، b' تصویر قائم آن است .

۱۱- مرئی و مخفی - چون فرض این است که ناظر در ناحیه

اول می ایستد ، جزئی از خط که در زیر صفحه افقی است و جزئی از آن که در عقب صفحه قائم است ، از نظر او پنهان هستند و دیده نمی شوند ؛ یعنی فقط جزئی از خط که در ناحیه اول است ، برای ناظر مرئی و بقیه مخفی است وقاعدتاً باید آن را نقطه چین رسم کرد ؛ ولی در ملخص عموماً این قاعده مراعات نمی شود .

۱۲- خطوط مهم - در میان خطوط بیشمار ، شش نوع خط که

موازی با صفحات تصویر و خط زمین یا عمود بر آنها هستند ، اوضاعی خاص دارند و خطوط مهم نامیده می شوند ؛ آنها عبارتند از خطوط افقی ، جبهی ، مواجه ، قائم ، منتصب و نیمرخ .

۱۳- خط افقی یا افقیه - خط افقی یا افقیه ، خطی است که

موازی با صفحه افقی باشد ؛ مانند خط H (۱) در شکل ۱۱ .

چون تمام نقاط این خط يك ارتفاع دارند ، تصاویر قائمشان به يك

فاصله اند از خط زمین ، پس :

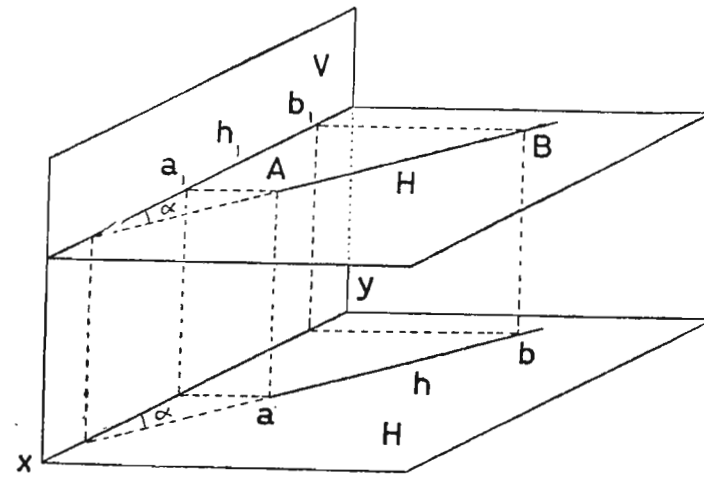
تصویر قائم افقیه موازی است با خط زمین و تصویر افقی افقیه با خود آن موازی است .

(زیرا شکل $AabB$ مستطیل است .)

زاویه ای که خط افقی با صفحه قائم تصویر می سازد مساوی است با زاویه تصویر افقی آن با خط زمین .

۱- H حرف اول Horizontale یعنی افقیه است .

(زیرا که اضلاع این دو زاویه نظیر بنظیر متوازیند .)



(ش ۱۱)

۱۲- خط جبهه‌ی یا جبهه‌ی - خط جبهه‌ی یا جبهه‌ی خطی است که

موازی با صفحه قائم تصویر

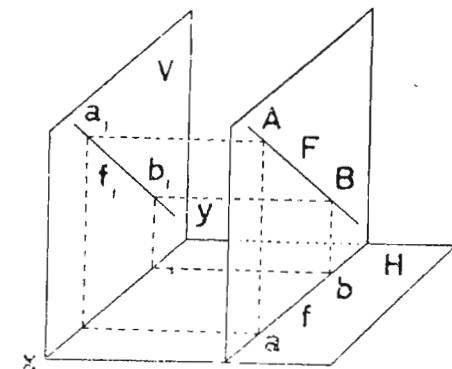
باشد ؛ مانند خط F' (۱) در

شکل ۱۲ .

به دلایلی مشابه با آنچه

درباره خط افقی گفتیم، معلوم

می شود :



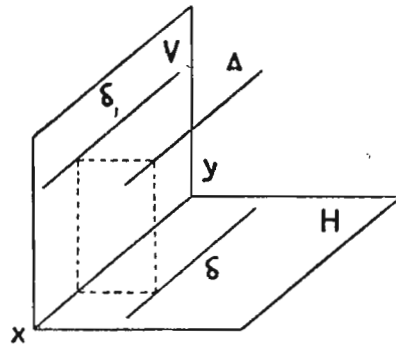
(ش ۱۲)

۱- تصویر افقی خط
جبهه‌ی موازی است با
• xy

۱- F حرف اول Frontale (جبهه) است .

(زیرا که همه نقاط آن ، يك بعد دارند .)

۲- تصویر قائم خط جبهه‌ی موازی است با خود آن .
۳- زاویه خط جبهه‌ی با صفحه افقی مساوی است
با زاویه تصویر قائم با خط زمین .



(ش ۱۳)

۱۵- خط مواجه - خط

مواجهه خطی است موازی با خط

زمین (خط Δ ، شکل ۱۳) .

این خط که موازی با فصل

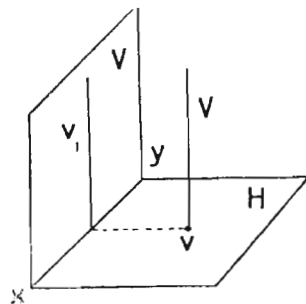
مشترك صفحات تصویر است ، با

هر دو صفحه تصویر موازی می شود ؛

پس هم جبهه است و هم افقیه ،

بنا بر این :

هر دو تصویر خط مواجه با خط زمین موازیند .



(ش ۱۴)

۱۶- خط قائم - خط

قائم آن است که بر صفحه

افقی عمود باشد ؛ مانند خط

V' در شکل ۱۴ .

۱- V حرف اول Verticale (قائم) است .

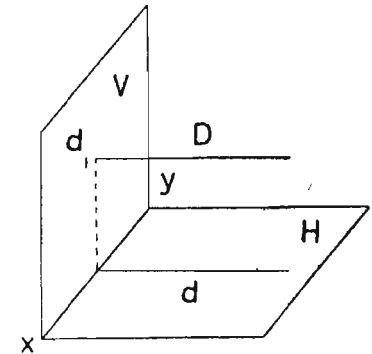
تصویر افقی خط قائم يك نقطه است (به چه دلیل؟)
تصویر قائم خط قائم عمود است بر خط زمین.

زیرا که صفحه مصور منتصب خط مذکور، صفحه ای است نیمرخ (چرا؟).

۱۷- خط منتصب - خط منتصب آن است که بر صفحه قائم تصویر عمود باشد؛ مانند خط $D^{(1)}$ در شکل ۱۵.

تصویر قائم خط منتصب يك نقطه است.
تصویر افقی خط منتصب عمود است بر xy .

۱۸- خط نیمرخ - چنانکه سابقاً هم دیده ایم، خط نیمرخ واقع است در يك صفحه نیمرخ و عمود است بر خط زمین (رجوع کنید به شکل‌های ۵ و ۶ فصل دوم)؛ پس هر دو تصویر آن در يك امتداد و عمودند

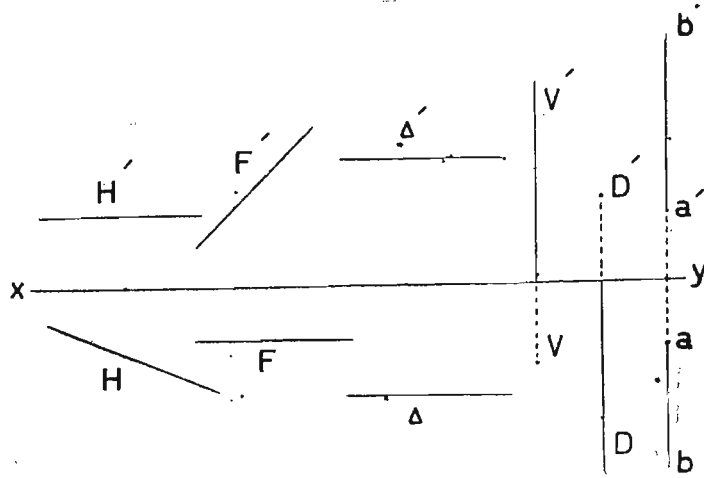


بر xy . (ش ۱۵)

برای مشخص شدن خط نیمرخ، بطوری که قبلاً گفته ایم، باید دو نقطه اش در دست باشد.

در شکل ۱۶، خط HH' افقیه و FF' جبهیه و $\Delta\Delta'$ مواجه و VV' قائم و DD' منتصب و $aba'b'$ نیمرخ است.

۱- حرف اول Debout (منتصب) است.

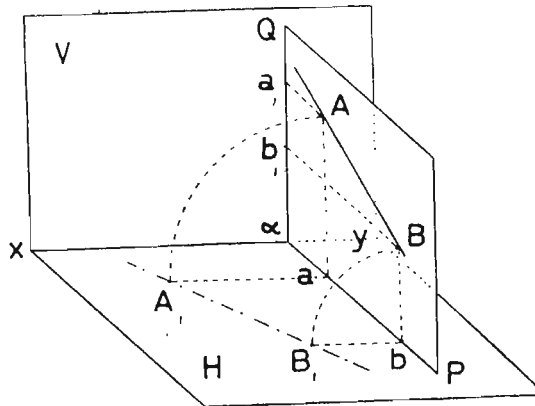


(ش ۱۶)

تمرین - نقطه A (۵ و ۲ و ۳) را تعیین کرده بر آن اول يك خط افقی بگذرانید که با صفحه تصویر (کدام صفحه تصویر؟) زاویه 45° بسازد؛ مسئله چند جواب دارد؟ اگر جوابها متعدد باشند، آن خطی را رسم کنید که اثرش (کدام اثر؟) طرف راست رابط aa' باشد. ثانیاً يك جبهیه بگذرانید که با صفحه تصویر زاویه 60° بسازد.

تمرین - در هر يك از صفحات نیمساز فرجه خطی رسم کنید و آثارش را بدست آورید.

۱۹- تسطیح صفحه نیمرخ بر صفحات تصویر - صفحه نیمرخ



(ش ۱۷)

عمود است بر xy و صفحات تصویر را در امتداد دو خط αP و αQ (شکل ۱۷)، که بر xy عمودند و آنهارا بترتیب اثر افقی و اثر قائم صفحه نیمرخ می نامیم، قطع می کند. اگر این

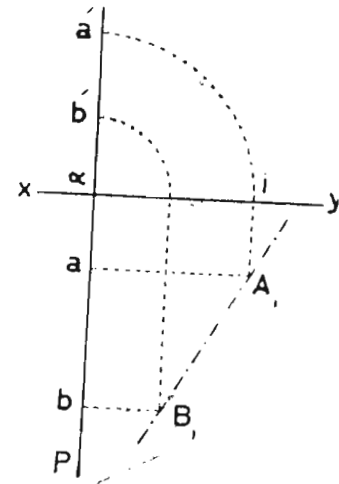
صفحه را در حول αP به اندازه 90° دوران دهیم تا بر صفحه افقی منطبق شود، گوئیم صفحه نیمرخ را بر صفحه افقی تسطیح کرده ایم.

در تسطیح صفحه نیمرخ بر صفحه افقی، هر نقطه مانند A_1 از صفحه نیمرخ بر روی دایره ای به مرکز a و به شعاع aa' تغییر مکان می دهد تا در A_1 بر صفحه افقی واقع شود؛ چون صفحه دایره بر αP عمود است، aa_1 بر αP عمود است و با aa' مساوی است؛ پس تسطیح یک نقطه از صفحه نیمرخ بر صفحه افقی، به این ترتیب بدست می آید که در صفحه افقی، از تصویر افقی نقطه عمودی بر اثر افقی صفحه نیمرخ اخراج کرده و طولی به اندازه ارتفاع آن نقطه بر آن جدا کنیم.

در ملخص، همین عمل را انجام می دهیم: از a (شکل ۱۸)، یعنی تصویر افقی نقطه، عمودی بر αP (محل تقاطع صفحه نیمرخ و xy است) اخراج کرده و از مبدأ a به اندازه ارتفاع نقطه aa' بر آن جدا می کنیم تا A_1 تسطیح نقطه aa' بدست آید.

برای جدا کردن طولی مساوی ارتفاع aa' ، به مرکز α و شعاع aa' قوسی می زنیم تا خط زمین در را i قطع کند و طول αi را (که همان ارتفاع نقطه باشد)، به وسیله رسم خطی عمود بر xy ، بر خطی که از a بر αP عمود شده است نقل می کنیم.

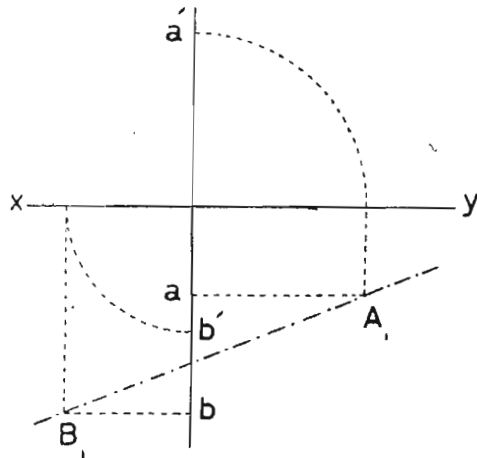
برای تسطیح یک خط نیمرخ، کافی است دو نقطه آن را تسطیح



(ش ۱۸)

کنیم. در شکل ۱۸، A_1B_1 تسطیح خط نیمرخ AB است بر صفحه افقی، همچنین در شکل ۱۹.

در تسطیح خط، تسطیح تمام نقاطی که ارتفاعشان مثبت است، در



یک طرف تصویر خط، مثلاً طرف راست آن، و تسطیح نقاطی که ارتفاعشان منفی است، در طرف دیگر آن واقع می شوند (شکل ۱۹) و بعکس.

فایده تسطیح

این است که خط فضایی

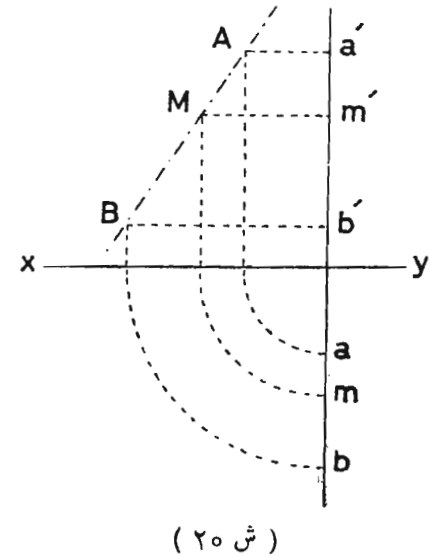
(ش ۱۹)

AB را به صورت A_1B_1 روی صفحه افقی در دسترس قرار می دهد. طول A_1B_1 مساوی AB و زاویه A_1B_1 با ab مساوی زاویه خط نیمرخ با صفحه افقی و زاویه A_1B_1 با خط زمین مساوی زاویه خط نیمرخ با صفحه قائم تصویر است.

تسطیح هر نقطه که بر AB یا امتداد آن باشد، بر A_1B_1 یا امتداد آن واقع می شود.

ارتفاع هر نقطه مساوی است با فاصله تسطیحش از تصویر افقی و بعد آن مساوی است با فاصله تسطیحش از خط زمین

۲۰ - صفحه نیمرخ را می توان به همین ترتیب بر صفحه قائم تسطیح



عمل تسطیح است، یعنی اگر صفحه نیمرخی را که بر صفحه افقی یا قائم تسطیح شده است، در حول

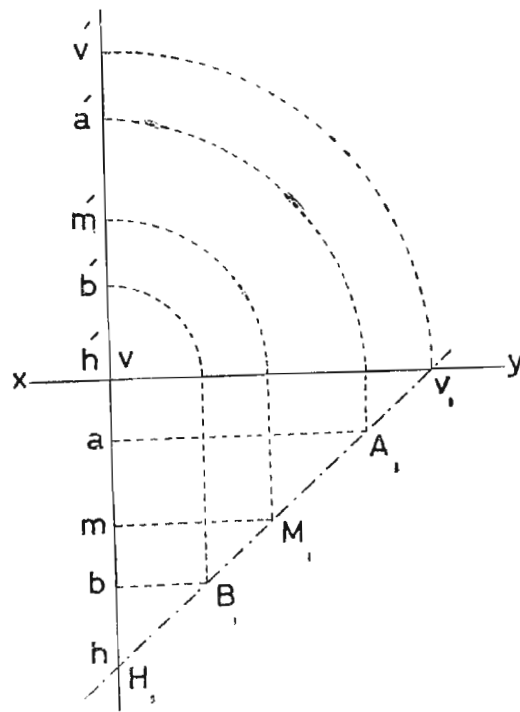
اثرش به اندازه ۹۰ درجه درجهت عکس دوران دهیم ، می‌گوییم که آن را ترفیع کرده ایم . اگر A_1B_1 تسطیح $aba'b'$ باشد ، $aba'b'$ ترفیع A_1B_1 است ؛ همچنین aa' ترفیع A_1 است . ترفیع هر نقطه M_1 واقع بر A_1B_1 روی $aba'b'$ است و به این طریق بدست می‌آید که از M_1 ، تسطیح نقطه فضایی M ، عمودی بر تصویر خط رسم کنیم تا يك تصویر نقطه M بدست آید (شکل ۲۱) ؛ آنگاه با استفاده از ارتفاع (یا بعد) تصویر دیگر M را بدست می‌آوریم .

مہم ، باخط و نقطہ رسم می کنیم .

حل کرد .

مثال ۱ - m تصویر افقی نقطه‌ای از نیمرخ $aba'b'$ داده

شده است (شکل ۲۱)؛ مطلوب است m' تصویر قائم آن.



اگر ارتفاع M معلوم شود، محل آن بر روی نیمرخ مشخص خواهد شد. برای پیدا کردن ارتفاع M ، نیمرخ مفروض را در A_1B_1 تسطیح می‌کنیم؛ M_1 ، تسطیح نقطه مطلوب، واقع است هم بر A_1B_1 و هم بر عمودی که از m بر ab اخراج شود؛ ارتفاع M مساوی است با mM_1 ؛ آن را بر

(ش ۲۱)

xy نقل می کنیم و به وسیله رسم قوس ربع دایره بر $a'b'$ انتقال می دهیم تا m' تصویر قائم M بدست آید .

مثال ۲- آثار خط نیمرخ 'aba'b' (شکل ۲۱) را تعیین کنید.

باز A_1B_1 تسطیح خط را بدست می آوریم؛ اثر افقی، نقطه ای است به ارتفاع صفر؛ پس تسطیح آن بر تصویر افقی منطبق است، یعنی H_1 ، محل تلاقی تسطیح و تصویر افقی خط، هم تسطیح اثر افقی است و هم تصویر افقی آن، و تصویر قاعدهش بر روی خط زمین است. اثر قائم، نقطه ای است به بعد صفر، پس فاصله تسطیحش از خط زمین صفر است؛ بنا بر این v_1 ، محل تلاقی تسطیح خط با xy ، تسطیح اثر قائم است؛

تصویر افقی ν بر روی xy است، و تصویر قائمش ν' را به وسیله قوسی از دایره بدست می آوریم.

تمرین- الف- $A_1 B_1$ تسطیح نیمرخی و امتداد تصاویر نیمرخی مذکور داده شده اند؛ آن را ترفیع کنید. ب- تصویر قائم یک نقطه از نیمرخی داده شده است؛ تصویر افقی آن را بدست آورید. ج- به وسیله تسطیح نیمرخی بر صفحه قائم، آثار آن را بدست آورید. د- بر نیمرخی مفروض، نقطه ای به ارتفاع h و نقطه دیگری به بعد e بدست آورید. ه- بر نقطه مفروض mm' نیمرخی بگذرانید که با صفحه افقی تصویر زاویه 60° درجه بسازد. و- بر نقطه مفروض، نیمرخی مرور دهید که با صفحه قائم زاویه 45° تشکیل دهد. ز- بر نقطه مفروض، نیمرخی بگذرانید که ارتفاع اثر قائمش دو برابر بعد اثر افقیش باشد.

۲۴- مسئله- بر خط مفروض $\Delta \Delta'$ نقطه ای تعیین کنید که ارتفاعش k برابر بعدش باشد.

فرض می کنیم که مسئله حل شده و aa' نقطه مطلوب باشد (شکل ۲۲)، یعنی $aa' = k \cdot \alpha a$. اگر یکی از تصاویر خط، مثلاً Δ ، xy را در i قطع کند و از i به a' وصل کنیم و خطی بدو موازی عمود بر xy بکشیم تا ia و xy و ia' را بترتیب مثلاً در t و β و t' قطع کند، در نتیجه تشابه دو مثلث tit' و aia'

چنین خواهیم داشت:

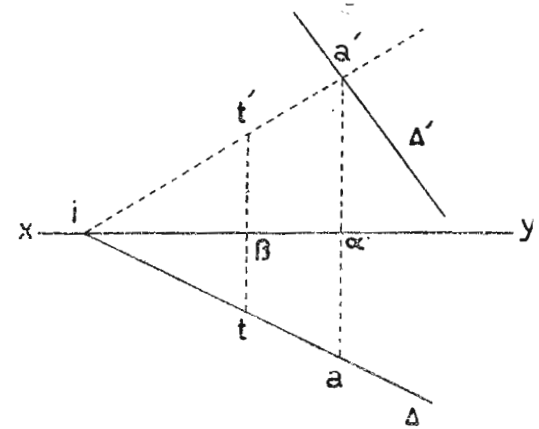
$$\frac{\beta t'}{\beta t} = \frac{\alpha a'}{\alpha a} = k$$

$$\beta t' = k \cdot \beta t \quad \text{یا}$$

پس راه حل

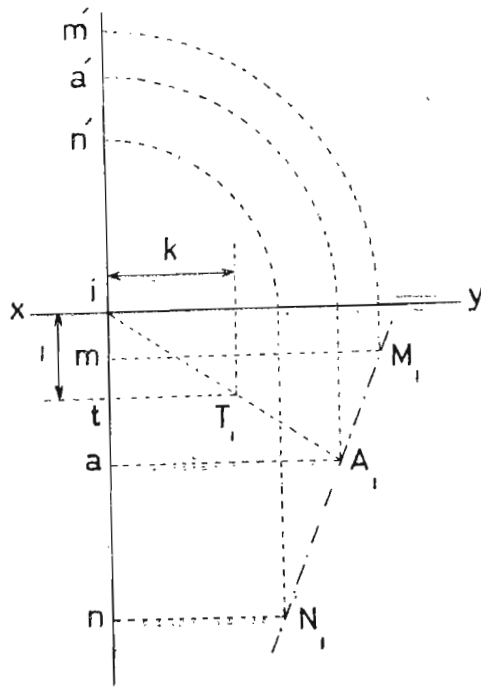
مسئله به این طریق

بدست می آید: Δ



(ش ۲۲)

تصویر افقی خط، را امتداد می دهیم تا در نقطه i خط زمین را قطع کند و از یک نقطه اختیاری t واقع بر Δ عمود بر $t\beta$ را بر xy فرود آورده بر امتداد آن، t' را با شرط $\beta t' = k \cdot \beta t$ معین می کنیم و از i به t' وصل کرده امتداد می دهیم تا Δ' را در a' قطع کند؛ aa' نقطه مطلوب است.



(ش ۲۳)

$$\frac{ia'}{ia} = \frac{aA_1}{ia} = \frac{tT_1}{it} = \frac{k}{1} = k$$

تمرین- الف- بر خطی که بر دو نقطه A (۲۵ و ۳) و B

می گذرد، دو نقطه M و N چنان تعیین کنید که نسبت بعد M به ارتفاع $\frac{1}{2}$

و نسبت ارتفاع N به بعدش $\frac{2}{5}$ باشد. ب- نقاط M و N با شرایط مذکور

برای حل مسئله در

مورد خط نیمرخی، اول

نیمرخی را تسطیح می کنیم

(شکل ۲۳)، سپس T_1 را به

فاصله 1 از xy و فاصله k

از تصویر افقی نیمرخی بدست

می آوریم؛ خط iT_1 تسطیح

نیمرخی را در A_1 ، که تسطیح

نقطه مطلوب است، قطع

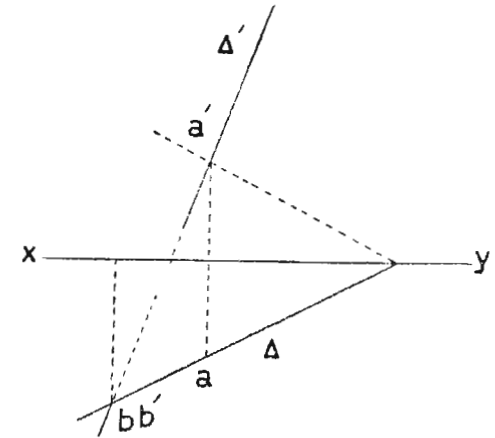
می کند؛ A_1 را در aa' ترفیع

می کنیم، aa' نقطه مطلوب

است؛ زیرا:

را بر خطی که بر دو نقطه $C (۵ و ۳)$ و $D (۵ و ۱ و ۴)$ می گذرد، بدست آورید .

۲۵ - نقاط تلاقی خط با صفحات نیمساز فرجه ها - نقاط تلاقی خط و صفحات نیمساز فرجه ها از نقاط مهم خط هستند . برای بدست آوردن نقطه تلاقی خط با نیمساز فرجه اول ، باید نقطه ای بر خط تعیین کرد که دو تصویرش نسبت به xy قرینه یکدیگر باشند؛ برای این کار، قرینه یکی از دو تصویر خط را نسبت به xy می سازیم تا تصویر دیگر را قطع کند (شکل ۲۴ نقطه aa').



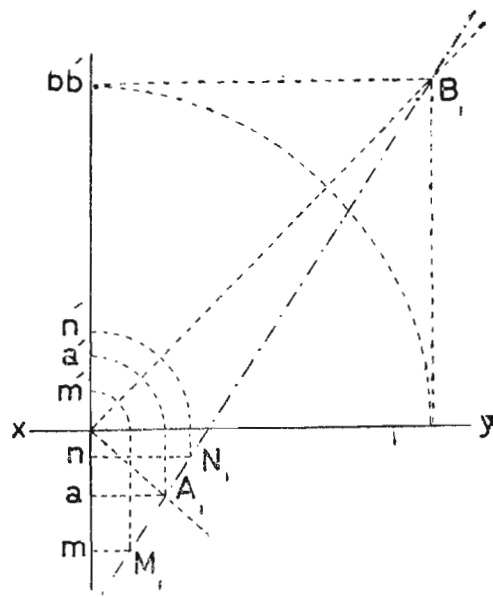
(ش ۲۴)

فصل مشترك خط با نیمساز فرجه دوم نقطه ای است از خط که تصاویرش بر هم منطبقند؛ پس برای تعیین ملخص آن، باید تصاویر خط را امتداد دهیم تا یکدیگر را قطع کنند (شکل ۲۴ نقطه bb').

در مورد خط نیمرخ، آن را تسطیح می کنیم و فقط تلاقی تسطیح را با نیمسازهای دو زاویه ای که بین xy و تصاویر خط تشکیل می شوند بدست می آوریم تا A_1 و B_1 ، تسطیح نقاط تلاقی نیمرخ با نیمساز فرجه اول و نیمساز فرجه دوم، بدست آیند؛ سپس A_1 را در aa' و B_1 را

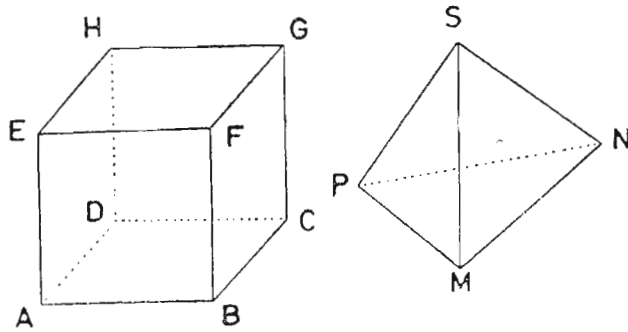
در bb' ترفیع می کنیم (شکل ۲۵).

۲۶ - اوضاع مختلف دو خط نسبت به یکدیگر - می دانیم که دو خط، ممکن است در یک صفحه باشند که در این حال یا متوازیند یا متقاطع؛ و ممکن است در یک صفحه نباشند که در این حال دو خط، متناظر نام دارند .



(ش ۲۵)

تمرین - الف - در شکل ۲۶ خطوط متوازی و متقاطع و متناظر را معین کنید .



(ش ۲۶)

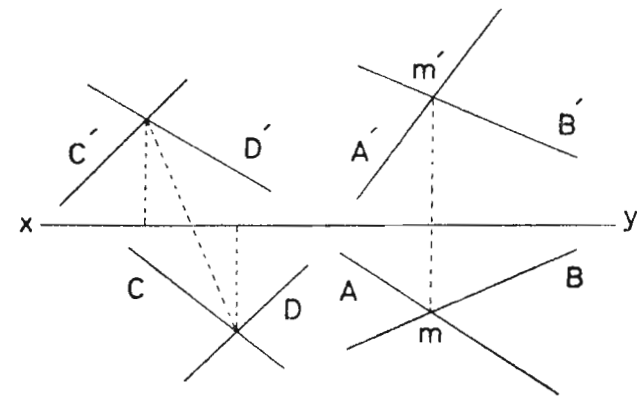
ب - در اطراف خود مثالهایی برای سه نوع خط پیدا کنید .

شرط تقاطع دو خط

۲۷ - قضیه - در هندسه ترسیمی شرط لازم و کافی برای

آنکه دو خط متقاطع باشند، این است که تصاویر همنامشان یکدیگر را قطع کنند و دو نقطه تقاطع، روی يك رابط باشند.

شرط لازم است، زیرا که اگر دو خط AA' و BB' یکدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع کنند و m و m' تصاویر M باشند، A و B تصاویر افقی دو خط، بر m می‌گذرند یعنی متقاطعند؛ همچنین A' و B' یکدیگر را در m' قطع می‌کنند؛ و بدیهی است که m و m' بر يك رابطند (شکل ۲۷).



(ش ۲۷)

شرط کافی است، زیرا که اگر نقاط تقاطع تصاویر همنام دو خط فضایی بر روی يك رابط باشند، این نقاط تقاطع، نقطه‌ای را در فضا مشخص می‌سازند که در عین حال بر روی هر دو خط است؛ پس دو خط فضایی متقاطعند.

در شکل ۲۷، دو خط AA' و BB' متقاطعند و دو خط CC' و DD' متقاطع نیستند.

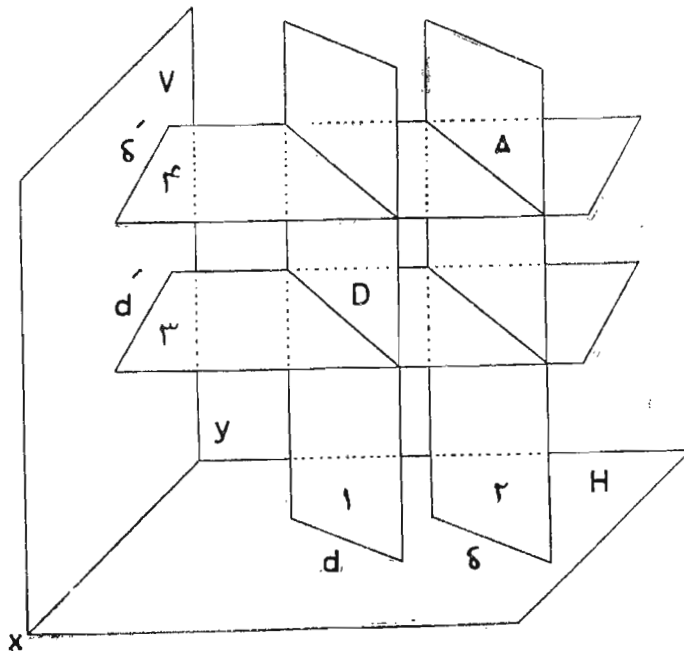
برای تحقیق در تقاطع دو خط نیمرخ، به شماره ۳۰ رجوع کنید.
تمرین ۱ - بر نقطه مفروض aa' خطی چنان مرور دهید که خط مفروض را در نقطه‌ای به ارتفاع h (یا به بعد e) قطع کند.

تمرین ۲ - تحقیق کنید شرط آنکه خطی يك خط قائم یا يك خط منتصب را قطع کند چیست؛ آنگاه از نقطه مفروض aa' خطی چنان بگذرانید که قائم VV' و منتصب DD' را قطع کند.

شرط توازی دو خط

۲۸ - قضیه - در هندسه ترسیمی شرط لازم و کافی برای آنکه دو خط (غیر نیمرخ) متوازی باشند، این است که تصاویر همنامشان با یکدیگر موازی باشند.

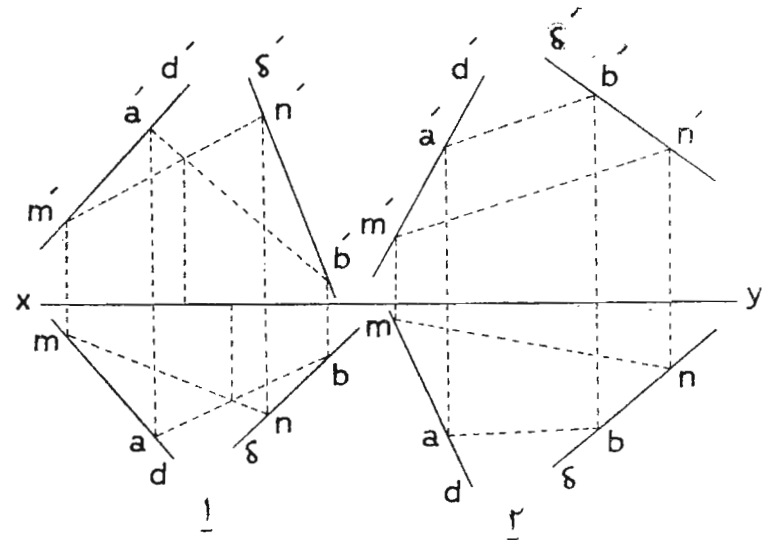
شرط لازم است، زیرا که اگر دو خط D و Δ متوازی باشند (شکل ۲۸)، صفحات مصور آنها متوازیند (چرا؟)؛ پس فصل مشترکهای



(ش ۲۸)

آنها با صفحه افقی، یعنی تصاویر افقی دو خط، متوازی‌اند. همچنین است تصاویر قائم دو خط.

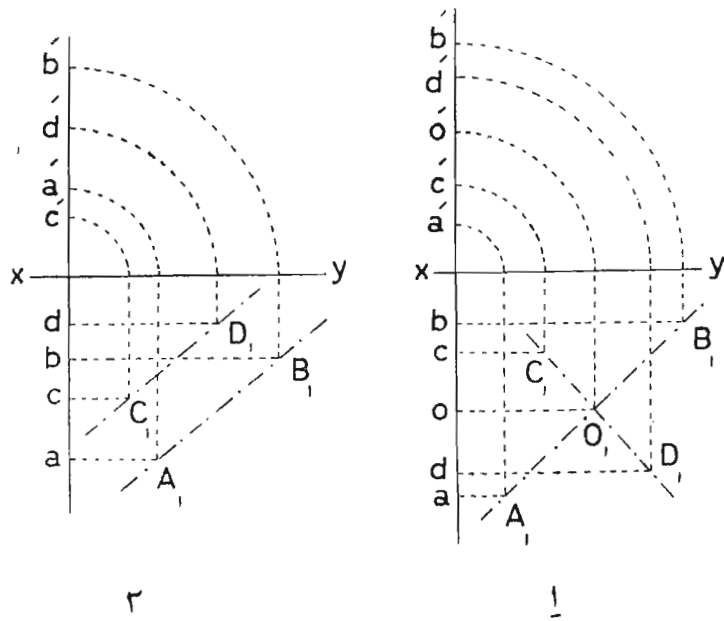
و $mm'n'n'$ نه متقاطع شدند و نه متوازی (شکل ۳۱-۲ و ۱)، dd' و $\delta\delta'$ در يك صفحه نیستند و متناظرند.



(ش ۳۱)

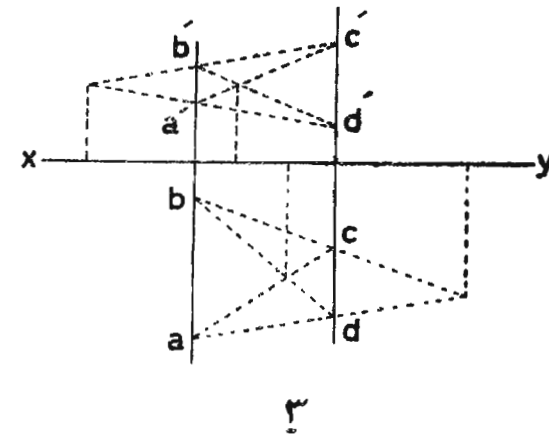
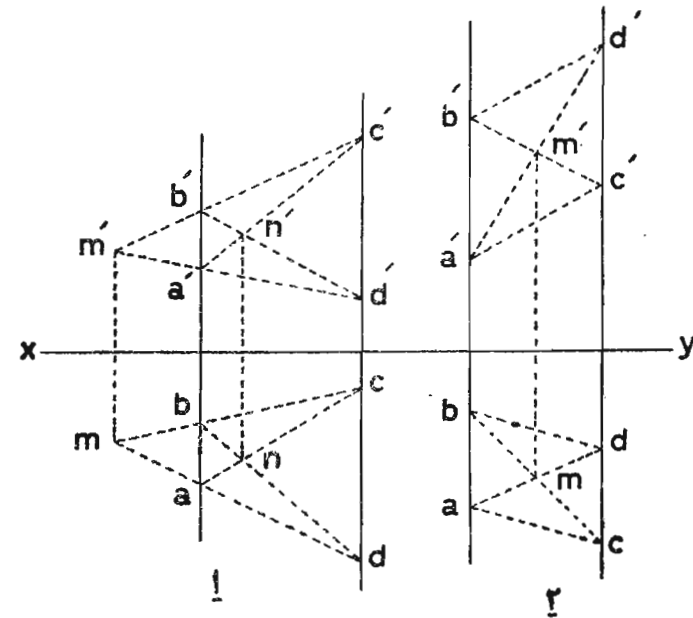
تحقیق در اوضاع دو خط نیمرخ- دو خط نیمرخ $aba'b'$ و $ede'd'$ ، یا تصاویرشان بر هم منطبقند (شکل ۳۲) یا از یکدیگر متمایزند (شکل ۳۳).

در حالت اول، یعنی وقتی که تصاویر دو خط مختلط باشند، دو خط در يك صفحه نیمرخ واقعند؛ پس یا متقاطعند یا متوازی. برای تحقیق، صفحه آنها را تسطیح می کنیم؛ اگر تسطیحاتی دو خط متقاطع باشند، (شکل ۳۲-۱) دو خط متقاطعند و O_1 تسطیح نقطه تقاطع آنهاست؛ آن را در oo' ترفیع می کنیم. اما اگر تسطیحاتی دو خط متوازی شوند (شکل ۳۲-۲)، دو خط مفروض با هم موازیند.



(ش ۳۲)

در حالت دوم، یعنی وقتی که تصاویر متمایز باشند، دو خط یا متناظرند یا متوازی. برای تحقیق، ممکن است آنها را تسطیح کرد؛ اگر تسطیحاتی متوازی شدند دو خط متوازیند و گرنه متناظرند؛ ولی اغلب برای تحقیق وضع آنها، از روشی که اندکی جلوتر گفتیم، استفاده می کنیم؛ یعنی دو نقطه aa' و bb' از یکی را به دو نقطه cc' و dd' از دیگری وصل می کنیم، اگر دو خط کمکی $aca'c'$ و $bdb'd'$ (یا $ada'd'$ و $bcb'c'$) متقاطع شوند (شکل ۳۳-۱)، دو نیمرخ در يك صفحه غیر نیمرخ واقعند، پس متوازیند؛ همچنین اگر دو خط از خطوط کمکی متوازی شوند، دو نیمرخ مفروض متوازیند (شکل ۳۳-۲)؛ اما اگر دو خط کمکی متناظر باشند (شکل ۳۳-۳)، دو نیمرخ هم متناظرند.

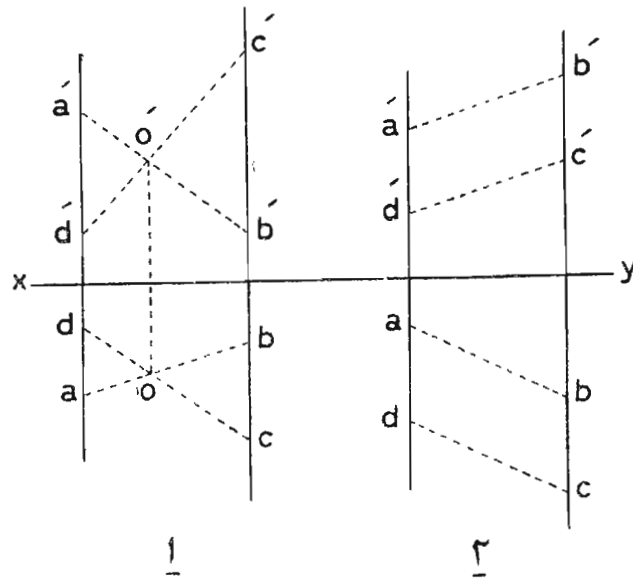


(ش ۳۳)

۳۱- مسئله - از نقطه aa' خطی به موازات نیمرخ $bcb'e'$

رسم کنید .

حل اول - $aba'b'$ را رسم کرده روی آن نقطه ای مانند oo' اختیار می کنیم ؛ آنگاه $coo'o'$ را می کشیم و آن را امتداد می دهیم تا رابط aa' یا امتداد آن را در dd' قطع کند (شکل ۳۴-۱)؛ خط $ada'd'$ نیمرخ مطلوب است (چرا ؟) .



(ش ۳۴)

حل دوم - $aba'b'$ را رسم کرده از cc' خطی موازی با آن می کشیم تا رابط aa' یا امتداد آن را در dd' قطع کند (شکل ۳۴-۲)؛ خط $ada'd'$ نیمرخ مطلوب است .

۳۲- قضیه - تصاویر قطعات واقع بر خطوط متوازی، بر نسبت همان قطعاتند .

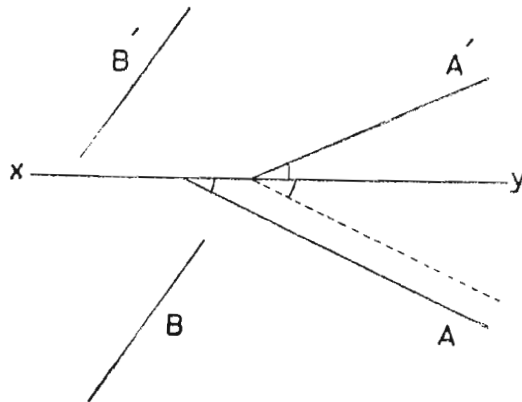
فرض می کنیم که P یکی از صفحات تصویر (شکل ۳۵) و AB

فرجه اول نسبت به xy قرینه یکدیگرند :

تصاویر هر خط که با نیمساز فرجه اول موازی باشد، با xy زوایای متساوی می سازند و بی با هم موازی نیستند .

(شکل ۳۶ ، AA')

به عبارت دیگر ، اگر خطی با نیمساز فرجه اول موازی باشد ، هر تصویر آن موازی است با قرینه تصویر دیگرش نسبت به خط زمین .
و چون دو تصویر هر خط واقع در نیمساز فرجه دوم بر یکدیگر منطبقند :



تصاویر هر خط که با نیمساز فرجه دوم موازی باشد ، با هم موازیند .

(شکل ۳۶ ، BB')

تمرین - بر

نقطه aa' خطی مرور

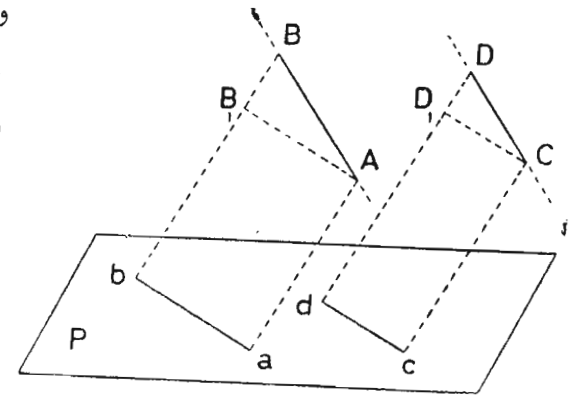
(ش ۳۶)

دهید که با نیمساز فرجه اول موازی باشد و تصویر قائمش با xy زاویه 30° بسازد . بر نقطه bb' خطی موازی با نیمساز فرجه دوم بگذرانید که تصویر قائمش بر نقطه معینی بگذرد .

و CD دو قطعه واقع بر دو خط متوازی و cd و ab تصویر های آنها باشند ؛ باید ثابت کنیم که :

$$\frac{cd}{ab} = \frac{CD}{AB}$$

از A و C دو خط ،



(ش ۳۵)

موازی با ab و cd می کشیم تا خطوط مصور نقاط B و D را بترتیب در B_1 و D_1 قطع کنند ؛ بدیهی است که $AB_1 = ab$ و $CD_1 = cd$ و داریم :

$$\frac{CD}{AB} = \frac{CD_1}{AB_1} = \frac{cd}{ab}$$

تمرین - پنج نقطه $A(1, 2, -3)$ و $B(3, 4, -1)$ و $C(3, \frac{15}{4}, 1)$ و $D(2, \frac{5}{4}, 2)$ و $E(3, 1, 0)$ مفروضند ؛
تصاویر دو خط AB و CD در خارج حدود شکل متقاطعند ؛ اولاً وضع آنها را نسبت به یکدیگر تحقیق کنید (اگر نقاط را دقیق انتخاب کنید ، دو خط متقاطع می شوند) . ثانیاً در صورتی که دو خط متقاطع باشند ، بر E خطی مرور بدهید که بر نقطه تقاطع آنها بگذرد .

۳۳ - مسئله - خطی رسم کنید که با نیمساز یکی از فرجه های

اول یا دوم موازی باشد .

شرط موازی بودن خطی بایک صفحه این است که آن خط بایکی از خطوط صفحه موازی باشد . چون دو تصویر هر خط واقع در نیمساز

خلاصه مطالب مهم

- ۱- تصویر خط مستقیم، خطی است مستقیم.
- ۲- هر خط، به وسیله دو تصویرش مشخص می شود مگر خط نیمرخ که باید دو نقطه اش در دست باشد.
- ۳- نقاط مهم خط عبارتند از: الف- اثر افقی که تصویر قائمش، نقطه تلاقی تصویر قائم خط است با خط زمین. ب- اثر قائم که تصویر افقیش، نقطه تلاقی تصویر افقی خط است با خط زمین. ج- نقطه تقاطع خط با صفحه نیمساز فرجه اول، که برای تعیین آن باید قرینه یکی از دو تصویر خط را نسبت به خط زمین معین ساخت تا تصویر دیگر را قطع کند؛ نقطه برخورد، يك تصویر نقطه تقاطع خط با نیمساز فرجه اول است. د- نقطه تقاطع خط با نیمساز فرجه دوم، که از تقاطع دو تصویر خط بدست می آید.
- ۴- خطوط مهم عبارتند از: افقی، که موازی با صفحه افقی است، و تصویر قائمش موازی است با xy . جبهی، که موازی با صفحه قائم است و تصویر افقیش موازی است با xy . قائم، که عمود است بر صفحه افقی و تصویر افقیش يك نقطه است و تصویر قائمش عمود است بر xy . منتهی، که عمود است بر صفحه قائم و تصویر قائمش يك نقطه است و تصویر افقیش عمود است بر xy . مواججه، که موازی با خط زمین است و هر دو تصویرش هم با آن موازیند. نیمرخ، که عمود است بر خط زمین و هر دو تصویرش بر امتداد یکدیگر و بر xy عمود هستند و برای تعیین آن، باید دو نقطه اش در دست باشد.
- ۵- مسائل مربوط به خط نیمرخ، به وسیله تسطیح آن بر صفحه تصویر باید حل شوند. برای تسطیح خط نیمرخ بر صفحه افقی (قائم)، از تصویر افقی (قائم) هر نقطه عمودی بر تصویر افقی (قائم) خط اخراج کرده و بر آن، طولی مساوی ارتفاع (بعد) نقطه جدا می کنیم تا تسطیح نقطه بدست آید.
- نقطه تلاقی تسطیح نیمرخ با تصویر افقی آن، اثر افقی نیمرخ است.
- نقطه تلاقی تسطیح نیمرخ با خط زمین، تسطیح اثر قائم آن است. نقاط تلاقی تسطیح نیمرخ با نیمسازهای زوایای بین xy و تصاویر نیمرخ، تسطیح نقاط برخورد آن با نیمساز فرجه های اول و دوم هستند.
- ۶- شرط تقاطع دو خط این است که تصویرهای همنامشان متقاطع و دو نقطه تقاطع، روی يك رابط باشند.

- ۷- شرط توازی دو خط این است که تصویرهای همنامشان متوازی باشند.
- ۸- شرط توازی دو خط نیمرخ این است که فواصل بین تصاویر قائم دو نقطه آنها متناسب باشند با فواصل بین تصاویر افقی همان نقاط.
- ۹- تصاویر همنام قطعات واقع بر خطوط متوازی، بر نسبت همان قطعاتند.
- ۱۰- هرگاه خطی با نیمساز فرجه اول موازی باشد، هر تصویرش موازی است با قرینه تصویر دیگرش نسبت به خط زمین.
- ۱۱- هرگاه خطی با نیمساز فرجه دوم موازی باشد، دو تصویرش متوازیند.
- ۱۲- اگر نیمرخی موازی با نیمساز فرجه اول باشد، فاصله تصویر افقی دو نقطه آن، مساوی فاصله تصاویر قائم همان دو نقطه است و هر نقطه که بدش بیشتر باشد، ارتفاعش هم بیشتر است.
- ۱۳- اگر نیمرخی موازی با نیمساز فرجه دوم باشد، فاصله تصاویر افقی دو نقطه آن، مساوی فاصله تصاویر قائم همان دو نقطه است؛ اما هر نقطه که بدش بیشتر باشد، ارتفاعش کمتر است.

تمرین

- ۱- بر روی يك رابط و در دو طرف خط زمین، دو نقطه به يك فاصله از این خط اختیار کنید و در مقابل نقطه ای که بالای xy است، حرف e' و در مقابل نقطه ای که زیر xy است، سه حرف e و f و f' را بنویسید و تحقیق کنید که خط $e'f'f$ چگونه است؟ اگر به جای e ، e' و به جای e' ، e بنویسید، وضع $e'f'f$ چگونه خواهد بود؟
- ۲- سه رأس مربعی که در يك صفحه نیمرخ است، بر روی نیمساز فرجه های اول و دوم قرار دارند؛ تصویر قائم يك رأس داده شده است، تصاویر رئوس دیگر را بدست آورید.
- ۳- در دو طرف xy و به يك فاصله از آن، دو نقطه اختیار کنید و در مقابل آن که بالای xy است، حروف a و b' و در مقابل آن که زیر xy است، حروف c و d' بنویسید و تصاویر دیگر این نقاط را روی خط زمین قرار

دهید. معلوم کنید شکل فضایی که چهار نقطه را به هم مربوط می‌کند، چه شکلی است.

۴- در روی دو رابط متمایز، دو نقطه به فاصله ۳ از خط زمین در بالای این خط و دو نقطه به فاصله ۵ از خط زمین در زیر این خط اختیار کرده و تحقیق کنید که خطی که این دو نقطه را به هم ربط دهد چگونه است، در صورتی که:

الف - نقاط بالای xy را a و b و نقاط زیر xy را a' و b' بنامیم.

ب - نقاط بالای xy را m و n' و نقاط زیر xy را m' و n نام

بگذاریم.

۵- بعد دو نقطه A و B از حیث قدر مطلق یکی است؛ همچنین ارتفاع

آن دو نقطه. معین کنید خط AB چگونه خطی است، در صورتی که:

الف - a و b زیر و a' و b' بالای xy باشند.

ب - a و a' و b' زیر xy باشند.

ج - a' بالای xy و a و b و b' زیر آن باشند.

د - b زیر xy و a و b' و a' بالای آن باشند.

۶- ثابت کنید که دو خط که در دو نقطه مختلف بر xy عمود باشند،

یا یک خط عمود بر xy و یک خط مایل نسبت به آن، یا یک خط مایل نسبت به

xy و یک نقطه ممکن نیست تصاویر یک خط باشند.

۷- مطلوب است مکان هندسی آثار افقی خطوط بیشمار که بر نقطه

مفروض aa' می‌گذرند و با صفحه افقی تصویر زاویه α می‌سازند. (مثال

عددی $\alpha = 60^\circ$). آیا می‌توانید یکی از خطوط بیشمار را در هندسه ترسیمی

بکشید و به کمک آن، مکان مطلوب را رسم کنید؟

۸- در چه صورت خط افقی یا جبهی، نیمساز فرجه‌ها را قطع نمی‌کند؟

۹- بر نقطه مفروض، یک خط افقی (جبهی) بگذارید که خط مفروضی

را قطع کند.

۱۰- خطی چنان رسم کنید که خطوط زیر را قطع کند:

الف - دو خط قائم و دو خط منتصب مفروض.

ب - دو خط قائم و یک خط منتصب، و یک خط غیر مشخص مفروض.

ج - یک خط قائم، یک منتصب یک مواجه و خط زمین.

د - یک خط قائم، یک خط منتصب، خط زمین و خط دیگری که خط زمین را تلاقی کرده باشد.

۱۱- بر نقطه مفروض A خطی بگذارید که با نیمساز فرجه اول (یا دوم) موازی باشد و خط مفروضی را قطع کند.

۱۲- بر نقطه مفروض، خطی بگذارید که با هر دو نیمساز فرجه موازی باشد.

۱۳- خطی رسم کنید که قائم و منتصب مفروضی را قطع کند و: الف - با خط مفروضی موازی باشد. ب- در صفحه نیمساز فرجه اول واقع باشد. ج- در صفحه نیمساز فرجه دوم واقع باشد.

۱۴- تصاویر سه رأس متوازی الاضلاع داده شده‌اند. ملخص شکل را کامل کنید.

۱۵- یک خط افقی (یا جبهی) رسم کنید که بر نقطه معینی بگذرد و با صفحه تصویر زاویه معینی بسازد.

۱۶- تصویر افقی و یک نقطه از تصویر قائم خطی داده شده‌اند؛ خط را چنان مشخص سازید که نیمساز فرجه اول (یا دوم) را در نقطه‌ای به ارتفاع معین قطع کند.

۱۷- دو منتصب DD' و $D'D''$ داده شده‌اند. منتصب دیگری رسم کنید که فاصله‌اش از اولی l و از دومی l' باشد. در شرط وجود و تعداد جوابها بحث کنید.

۱۸- ثابت کنید که اگر تصویرهای غیر همنام دو خط منطبق باشند، آن دو خط نسبت به نیمساز فرجه دوم قرینه یکدیگرند.

۱۹- از نقطه مفروض، خطی موازی با نیمساز فرجه اول (یا دوم) رسم کنید که تصویر افقی‌اش با خط زمین زاویه α بسازد.

۲۰- از نقطه مفروض، خطی عمود بر نیمساز فرجه اول رسم کنید.

۲۱- از نقطه مفروض، خطی بر نیمساز فرجه دوم عمود کنید.

۲۲- بر خط مفروض، نقطه‌ای معین کنید که مجموع یا تفاضل بعد و

ارتفاعش m باشد. حالت مخصوص، وقتی که خط، قائم یا منتصب یا نیمرخ باشد.

۲۳- بر نقطه aa' خطی مرور دهید که بعد اثر افقی و ارتفاع اثر

قائمش متساوی باشند . مسئله چند جواب دارد ؟

مسئله را در این حالت‌های خاص حل کنید : الف - تصویر قائم خط بر نقطه معینی بگذرد . ب - تصویر افقی خط با خط زمین زاویه معینی بسازد .

۲۴ - بر نقطه مفروض A نیم‌رخ بگذرانید که : الف - نسبت بین ارتفاع اثر قائم و بعد اثر افقی k باشد . ب - نسبت قطعات محصور بین A و آثار خط مساوی m باشد .

۲۵ - مطلوب است مکان هندسی آثار خطوطی که بر يك نقطه مفروض بگذرند و با صفحه نیمساز فرجه اول (یا دوم) موازی باشند .

۲۶ - يك خط افقی یا جبهی چنان رسم کنید که دو خط متناظر مفروض را قطع کند و فاصله دو نقطه تقاطع به طول معین l باشد . بر حسب طول l در تعداد جوابها بحث کنید .

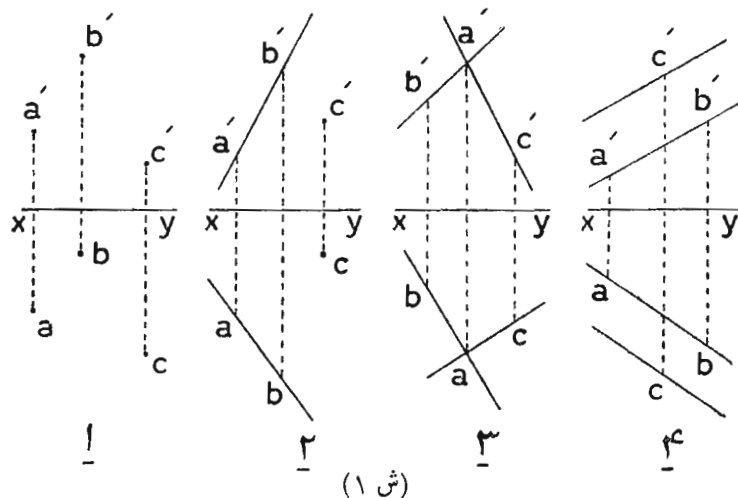
۲۷ - يك خط افقی (یا جبهی) چنان رسم کنید که دو خط متناظر مفروض را قطع کند و تصویر افقی (یا قائم) آن موازی امتداد معینی باشد .

۲۸ - ثابت کنید که اگر تصاویر قائم دو خط متناظر موازی باشند ، تصاویر قائم تمام خطوط جبهی که آنها را قطع کنند ، بر يك نقطه می‌گذرند .

راهنمایی - این نقطه واقع است بر رابط نقطه تلاقی تصویر افقی دو خط مفروض .

صفحه

۱ - نمایش صفحه - در هندسه ، صفحه به وسیله سه نقطه غیر واقع بر يك استقامت ، يك خط و يك نقطه در خارج آن ، دو خط متقاطع ، یا دو خط متوازی مشخص می‌شود . در هندسه ترسیمی نیز صفحه به وسیله تصاویر سه نقطه (شکل ۱-۱) ، يك خط و يك نقطه (شکل ۱-۲) ، دو خط متقاطع (شکل ۱-۳) ، یا دو خط متوازی (شکل ۱-۴) نمایش داده می‌شود .



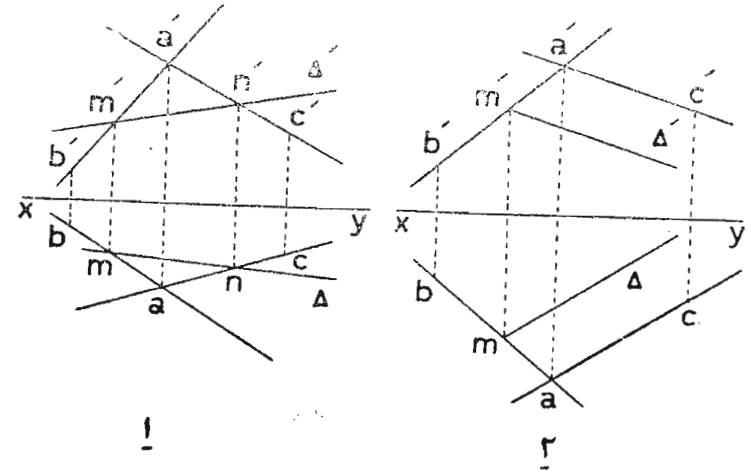
(ش ۱)

بطوری که از شکل نیز پیداست ، هر چهار صورت ، يك صفحه را

نمایش می‌دهند .

۲- مسئله - صفحه ای با سه نقطه A و B و C مشخص است؛ Δ تصویر افقی خطی از این صفحه در دست است، Δ' تصویر قائم آن را بدست آورید.

$aca'c'$ و $aba'b'$ را وصل می‌کنیم (شکل ۲). چون Δ در آن صفحه است، یا هر دو خط را قطع می‌کند (شکل ۲-۱)، یا با یکی از آنها موازی و بادیگری متقاطع است (شکل ۲-۲). اگر Δ تصویرهای افقی دو خط، یعنی ab و ac را در m و n قطع کند، m' و n' را بر $a'b'$ و $a'c'$ بدست می‌آوریم؛ $m'n'$ تصویر مطلوب است. ولی هرگاه Δ با ac موازی باشد و ab را در m قطع کند، m' را بر $a'b'$ بدست آورده از m' خط Δ' را موازی با $a'c'$ می‌کشیم؛ Δ' تصویر مطلوب است.



(ش ۲)

تمرین ۱- تصویر قائم خطی از صفحه مفروضی داده شده است؛ تصویر افقی آن را بدست آورید.

تمرین ۲- الف - در صفحه مفروضی يك خط افقی و يك جبهی رسم کنید. ب - تحقیق کنید که در يك صفحه، خطوط افقی و جبهی بیشمار می‌توان رسم کرد.

۳- خطوط افقی و جبهی يك صفحه، فصل مشترکهای آن صفحه‌اند با صفحاتی که موازی با صفحه افقی تصویر یا صفحه افقی تصویر باشند. ۴- تمام خطوط افقی يك صفحه متوازی‌اند، زیرا که خطوط واقع در يك صفحه یا متقاطعند یا متوازی و خطوط افقی صفحه که تصاویر قائمشان متوازی‌اند، متقاطع نمی‌توانند باشند.

به همین دلیل، خطوط جبهی يك صفحه متوازی‌اند.

۵- مسئله - در صفحه مفروضی يك خط افقی به ارتفاع h رسم کنید.

تصویر قائم آن را موازی با خط زمین و به فاصله h از آن رسم کرده تصویر افقی آن را بدست می‌آوریم.

۶- آثار صفحه، اثر افقی و قائم - فصل مشترك هر صفحه با صفحه افقی تصویر را اثر افقی، و فصل مشتركش با صفحه قائم تصویر را اثر قائم آن صفحه می‌نامند.

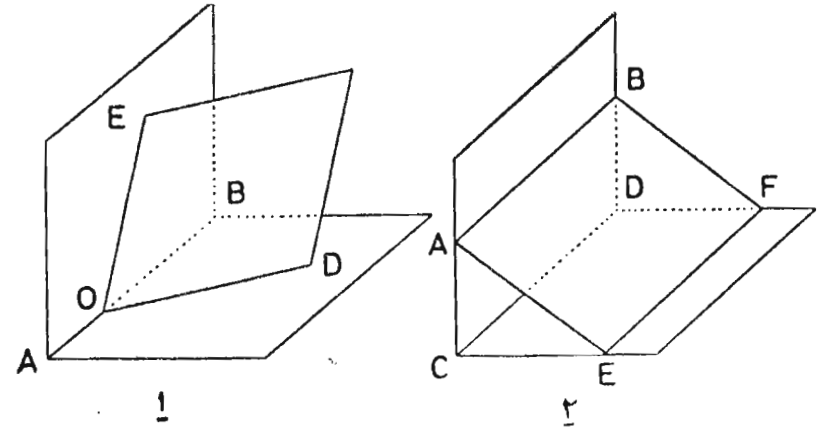
اثر افقی صفحه، خطی است افقی به ارتفاع صفرو اثر قائم آن، خطی است جبهی به بعد صفر.

۷- قضیه - آثار افقی و قائم صفحه، یا یکدیگر را در روی خط زمین قطع می‌کنند یا با یکدیگر موازی‌اند.

در هندسه فضایی ثابت شده است که هرگاه سه صفحه دو بدو یکدیگر را قطع کنند، سه فصل مشترك یا بر يك نقطه می‌گذرند (شکل ۳-۱)، یا متوازی‌اند (شکل ۳-۲).

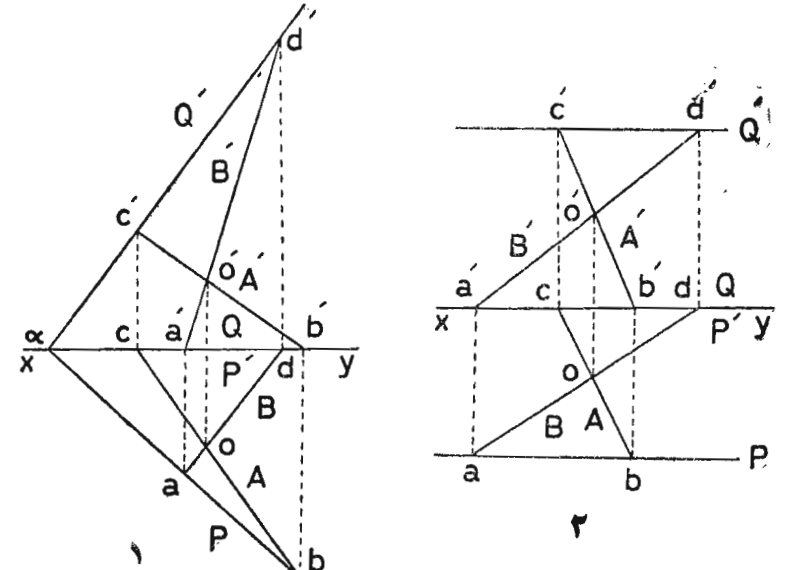
در هندسه ترسیمی، هر صفحه با صفحات افقی و قائم تصویر، سه صفحه‌اند که فصل مشتركهایشان دو بدو اثر افقی صفحه و اثر قائم صفحه و خط

زمین هستند؛ پس این سه خط یا بر يك نقطه می گذرند یا متوازیند .



(ش ۳)

۸ - مسئله - آثار صفحه ای را که به دو خط متقاطع AA' و BB' نموده شده است، بدست آورید .
راه اول - اثر افقی، خطی است افقی و به ارتفاع صفر؛ پس تصویر قائم آن بر خط زمین منطبق است. در این صورت، تصویر قائم خطی داده شده است و تصویر افقی آن را بدست می آوریم (شکل ۴) .



(ش ۴)

این تصویر افقی که آن را P می نامیم، یا خط زمین را در α قطع می کند (شکل ۴-۱)، یا با آن موازی است (شکل ۴-۲). در صورت اول، یعنی وقتی که P خط زمین را در α قطع کند، اثر قائم صفحه نیز بر α خواهد گذشت و برای رسم آن، تعیین يك نقطه دیگر کافی است. برای تعیین این نقطه توجه می کنیم که اثر قائم، خطی است جبهی به بعد صفر، پس تصویر افقی آن بر خط زمین منطبق است؛ این تصویر افقی با تصویر افقی یکی از دو خط مفروض، مثلاً A ، در c تلاقی می کند؛ c' را به کمک رابط بدست می آوریم؛ نقطه cc' متعلق است به اثر قائم صفحه و cc' تصویر قائم اثر قائم صفحه است، آن را Q' می نامیم .

هرگاه P ، اثر افقی، با خط زمین موازی باشد، اثر قائم هم با آن موازی خواهد بود و برای رسم آن، باز هم کافی است که يك نقطه بدست آید . این نقطه را به همان طریقه که برای صورت اول گفتیم بدست می آوریم و از آن، خطی موازی با xy می کشیم؛ خط اخیر، Q' ، تصویر قائم اثر قائم صفحه است .

P' تصویر قائم اثر افقی و Q تصویر افقی اثر قائم، بر xy منطبقند .

راه دوم - اثر افقی صفحه، مکان هندسی آثار افقی تمام خطوط آن صفحه است . پس برای تعیین اثر افقی صفحه کافی است aa' و bb' آثار افقی دو خط آن را بدست آورده آنها را به هم وصل کنیم (شکل ۴). برای تعیین اثر قائم صفحه کافی است اثر قائم یکی از خطوط آن مثلاً cc' ، اثر قائم AA' ، را بدست آوریم؛ زیرا که اگر اثر افقی خط زمین را در α قطع کند، α يك نقطه دیگر از اثر قائم است؛ و اگر اثر افقی

بر m يك خط دلخواه مانند ab مرور می‌دهیم و آن را تصویر افقی خطی از صفحه فرض کرده $a'b'$ تصویر قائم آن را بدست می‌آوریم (شکل ۶). تصویر قائم نقطه مفروض، بر روی $a'b'$ است؛ آن را به وسیلهٔ رسم رابط نقطهٔ m پیدا می‌کنیم.



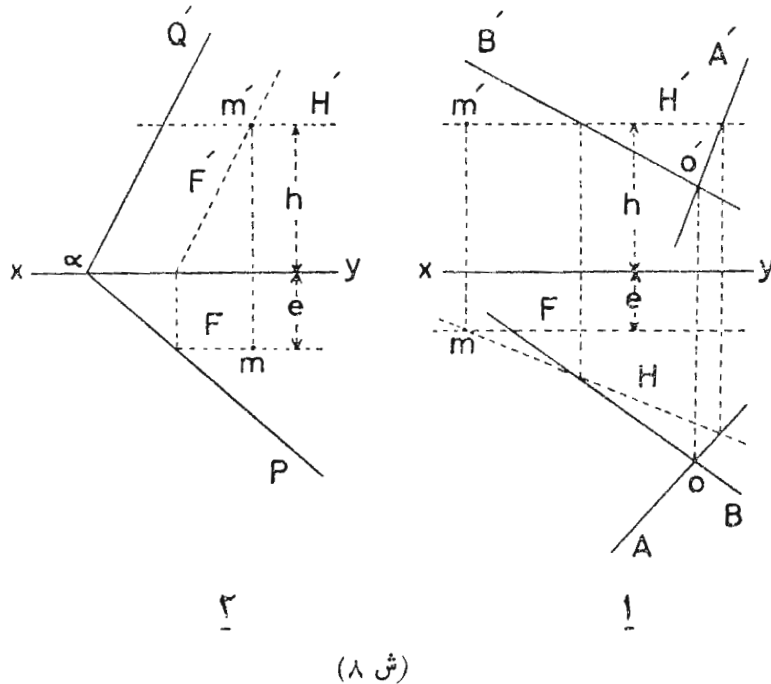
از m' ، تصویر قائم نقطه ، صرف نظر می کنیم و به فرض اینکه m تصویر افقی يك نقطه صفحه مفروض باشد ، تصویر قائم آن را بدست

۹- اهمیت آثار صفحه - آثار صفحه ، برای نمایش دادن يك صفحه ، ساده ترین وسیله اند ؛ زیرا كه يك تصویر هر يك از آنها بر xy منطبق است و نقطه تقاطعشان نیز بر این خط قرار دارد ؛ در نتیجه برای نمایش صفحه ، رسم دو خط αP (تصویر افقی اثر افقی) و $\alpha Q'$ (تصویر قائم اثر قائم) کافی است (شکل ۵). معمولاً از نوشتن حروف Q و P'



تمرین ۴- در صفحه‌ای که به وسیلهٔ آثارش نموده شده است، يك خط افقی به ارتفاع h با يك خط جبهی به بعد e رسم کنید .

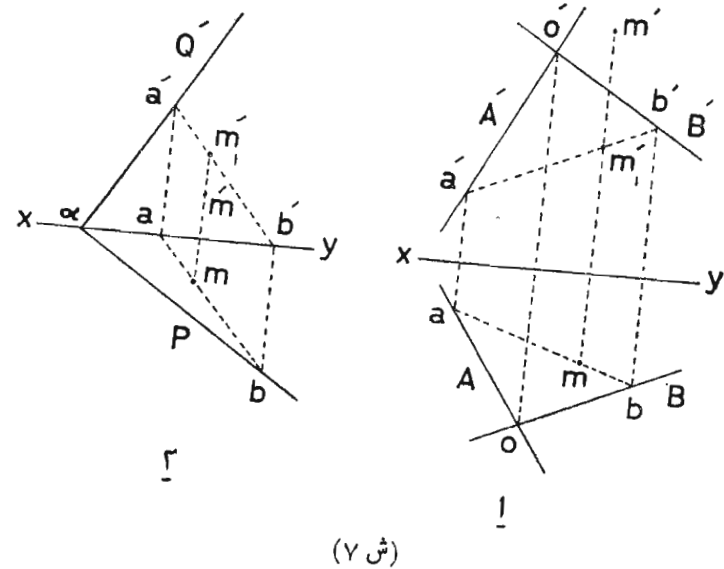
خط جبهی FF' را به بعد e و خط افقی HH' را به ارتفاع h رسم می‌کنیم؛ mm' ، نقطه تقاطع آنها، جواب مسئله است. بطوری که در شکل می‌بینید، احتیاجی به کشیدن تصویر قائم خط جبهی یا تصویر افقی خط افقی (شکل ۸ - ۱ و ۲) نیست، یعنی رسم



هر دو تصویر یکی از خطوط افقی یا جبهی مذکور و يك تصویر خط دیگر کافی است.

۱۳- نکته مهم این است که در هر شکل ترسیمی، بطور عادی عدد زیادی خط رسم می‌شود، بنابراین هر چه ممکن باشد باید در رسم خطوط صرفه جویی کرد تا شکل در حدود امکان خلوت تر و قابل استفاده تر باشد.

می‌آوریم و آن را m' می‌نامیم؛ اگر m' بر m' منطبق شود، نقطه مفروض در صفحه است و الا نیست. در صورتی که نقطه در صفحه نباشد، اگر ارتفاع m' از ارتفاع m' کمتر شود (شکل ۷-۱)، mm' بالای صفحه است (یعنی از صفحه افقی دورتر است) و اگر ارتفاع m' از ارتفاع m' بیشتر باشد (شکل ۷-۲)، mm' زیر صفحه است (یعنی به صفحه افقی نزدیکتر است).



تمرین - نقطه ای و صفحه ای رسم کنید و تحقیق کنید که نقطه در صفحه هست یا نیست. در صورتی که نقطه در صفحه نباشد، تحقیق کنید که آیا جلو صفحه است یا عقب آن (یعنی از صفحه قائم تصویر دورتر است یا به آن نزدیکتر).

۱۴- مسئله - در صفحه مفروض، نقطه ای به بعد e و ارتفاع

h معین کنید.

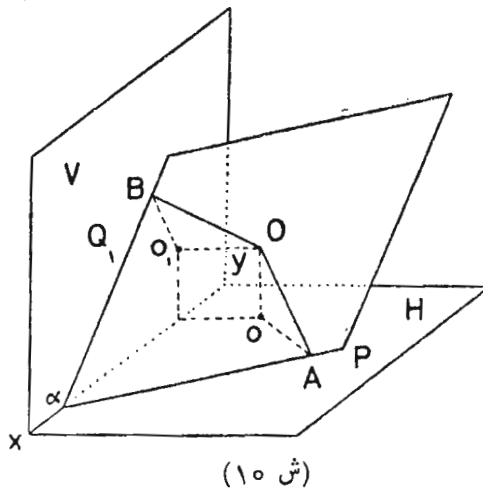
در شکل ۹، CC' فصل مشترك صفحه با نیمساز فرجه اول و DD' فصل مشترك آن با نیمساز فرجه دوم است.

تمرین - اگر آثار صفحه‌ای با خط زمین موازی باشند، برای تعیین فصل مشترك آن با نیمساز فرجه‌ها چند نقطه لازم است؟ به چه دلیل؟

۱۶ - خطوط بزرگترین شیب يك صفحه نسبت به صفحات

تصویر - می‌دانیم که خط بزرگترین شیب صفحه P نسبت به صفحه افقی H (شکل ۱۰)، خطی است از صفحه P مانند OA که بر اثر افقی صفحه، یعنی فصل مشترك صفحه و صفحه افقی، عمود باشد. بدیهی است که این خط بر تمام خطوط افقی صفحه P عمود است، و چون تصویر افقی زاویه قائمه OAP زاویه‌ای است قائمه، پس:

تصویر افقی خط بزرگترین شیب صفحه‌ای نسبت به صفحه افقی، عمود است بر اثر افقی و تصویر افقی سایر خطوط افقی صفحه.

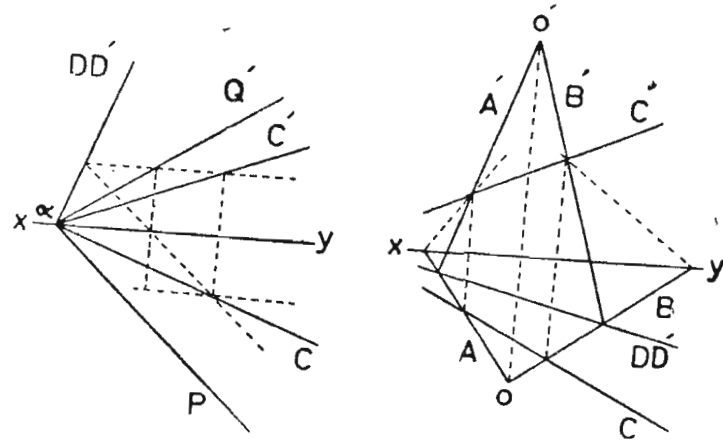


به دلیل مشابه:
تصویر قائم خط
بزرگترین شیب
صفحه نسبت به
صفحه قائم، عمود
است بر اثر قائم و
تصویر قائم سایر
خطوط جبهه‌ی
صفحه. بدیهی است

تمرین - تحقیق کنید که آیا حل مسئله شماره ۱۲ در صورتی که آثار صفحه با خط زمین موازی باشند، ممکن است؟ اگر ممکن نیست دلیل آن را پیدا کنید.

۱۴ - خطوط مهم صفحه - در هر صفحه خطهای بیشمار وجود دارند؛ از آن میان، برخی اهمیت بسیار دارند که عبارتند از: آثار صفحه، خطوط افقی و جبهی، فصل مشتركهای صفحه با نیمساز فرجه‌های اول و دوم و خطهای بزرگترین شیب نسبت به صفحات افقی و قائم. آثار صفحه و خطوط افقی و جبهی را قبلاً دیده‌ایم؛ اینک در باره سایر خطوط مهم صفحه مطالعه می‌کنیم:

۱۵ - فصل مشترك صفحه با نیمساز فرجه‌ها - برای تعیین فصل مشترك صفحه با نیمساز فرجه اول (یا دوم)، کافی است که نقاط تلاقی دو خط آن را با این صفحه بدست آوریم (شکل ۹). اگر صفحه با آثارش



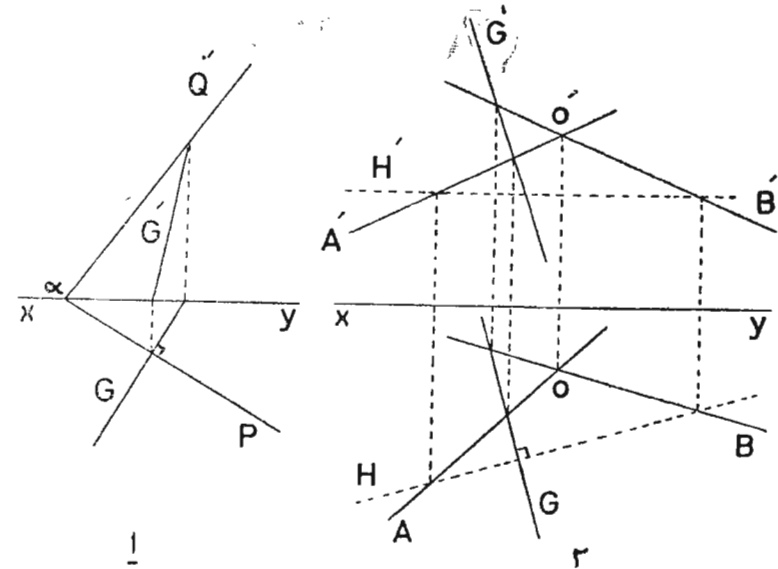
(ش ۹)

نموده شده و α نقطه تلاقی آثار باشد، یکی از نقاط مطلوب است و کافی است که يك نقطه دیگر بدست آید.

که در هر صفحه، خطوط بزرگترین شیب بیشمار نسبت به صفحه افقی می‌توان رسم کرد که همه باهم موازیند؛ و همچنین است نسبت به صفحه قائم.

۱۷- مسئله - در صفحه مفروض، یک خط بزرگترین شیب نسبت به صفحه افقی رسم کنید.

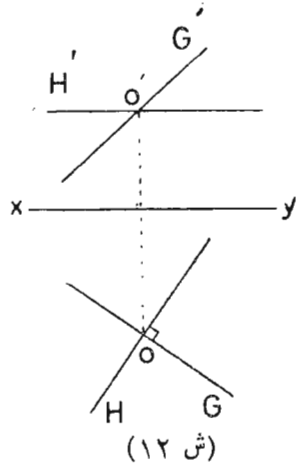
هرگاه صفحه به وسیله آثارش نموده شده باشد (شکل ۱۱ - ۱)



(ش ۱۱)

تصویر افقی خط بزرگترین شیب را به αP عمود می‌کنیم (خط G) و تصویر قائم آن، G' ، را بدست می‌آوریم. اگر صفحه به وسیله دو خط نمایش داده شده باشد (شکل ۱۱-۲)، اول یک خط افقی مانند HH' در صفحه رسم می‌کنیم، آنگاه تصویر افقی بزرگترین شیب را عمود بر H می‌کشیم (خط G) و تصویر قائمش، G' ، را تعیین می‌کنیم.

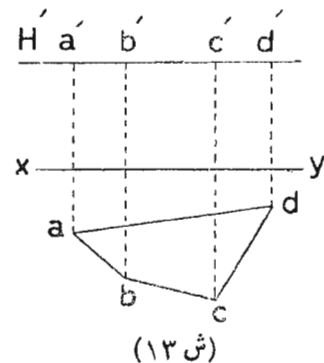
۱۸ - اهمیت خط بزرگترین شیب در این است که بتنهایی برای مشخص کردن صفحه کافی است. در حقیقت اگر GG' (شکل ۱۲)



خط بزرگترین شیب صفحه‌ای نسبت به صفحه افقی باشد، صفحه کاملاً مشخص است؛ زیرا که از هر نقطه GG' می‌توان فوراً یک خط افقی از صفحه را رسم کرد و صفحه را با دو خط مشخص کرد (H)، تصویر افقی خط افقی، عمود است بر G و H' تصویر قائمش، موازی است با xy .

۱۹ - صفحات مهم - در میان صفحات بیشماری که می‌توان رسم کرد، شش صفحه دارای وضع خاص هستند و از این رو صفحات مهم نامیده می‌شوند و آنها عبارتند از: صفحات افقی، جبهی، قائم، منتصب، مواجه و نیمرخ. این صفحات، مانند خطوط همانم خود، یا موازی صفحات تصویر و خط زمین هستند یا عمود بر آنها.

۲۰ - صفحه افقی (شکل ۱۳)،



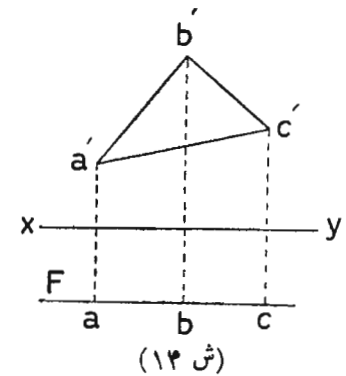
موازی است با صفحه افقی تصویر. بنابراین، اثر افقی ندارد و اثر قائمش، H' ، با خط زمین موازی است (زیرا که فصل مشترکهای یک صفحه با دو صفحه متوازی، متوازیند). تصویر قائم هر نقطه یا هر خط که در صفحه افقی

باشد، بر اثر قائم آن واقع می‌شود؛ مثلاً اگر چهارضلعی $ABCD$ در صفحه افقی H' واقع بوده و $abcd$ تصویر افقی آن باشد، $a'b'c'd'$ تصویر قائم چهارضلعی نامبرده، بر H' قرار خواهد داشت (شکل ۱۳). طول خطوط و اندازه زوایایی که در يك صفحه افقی باشند، در تصویر افقی به مقدار حقیقی است.

تمرین - در يك صفحه افقی به ارتفاع ۳ دو نقطه A و B را به بعد ۶ و ۷ تعیین کنید بقسمی که فاصله را بطهایشان ۴ و B طرف راست A باشد. آنگاه در همان صفحه مثلث متساوی الاضلاعی بسازید که AB يك ضلع آن باشد.

۲۱- صفحه جبهی (شکل ۱۴)،

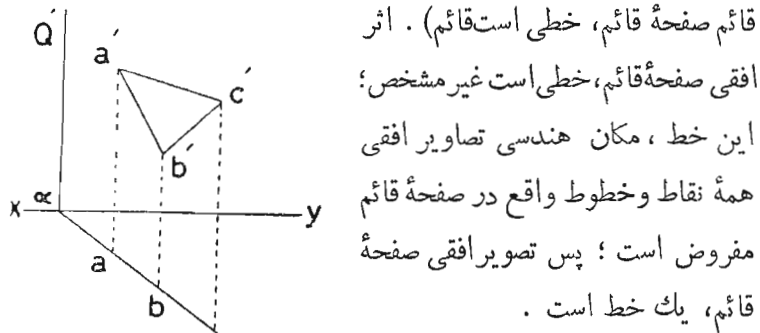
موازی با صفحه قائم تصویر است. به دلیل شبیه آنچه در باره صفحه افقی گفتیم، صفحه جبهی اثر قائم ندارد و اثر افقی موازی با xy است. تصاویر افقی تمام نقاط و خطوط صفحه جبهی، بر روی



اثر افقی آن واقع می‌شوند و طولها و زوایای اشکال واقع در صفحه جبهی، در تصویر قائم به مقدار حقیقیند.

تمرین - در يك صفحه جبهی به بعد ۲ مربعی بسازید که يك رأس A به ارتفاع ۳ و رأس دیگرش B به ارتفاع ۴ طرف راست A باشد و فاصله را بطهای آن دو نقطه ۳ و ارتفاع دورأس دیگر، از ارتفاع A و B زیادتیر باشد.

۲۲ - صفحه قائم (شکل ۱۵)، عمود است بر صفحه افقی تصویر؛ پس اثر قائمش عمود است بر xy (زیرا اگر دو صفحه متقاطع بر صفحه ثالی عمود باشند، فصل مشترکشان هم بر آن صفحه عمود است؛ یعنی اثر



قائم صفحه قائم، خطی است قائم). اثر افقی صفحه قائم، خطی است غیر مشخص؛ این خط، مکان هندسی تصاویر افقی همه نقاط و خطوط واقع در صفحه قائم مفروض است؛ پس تصویر افقی صفحه قائم، يك خط است.

زاویه‌ای که اثر افقی صفحه قائم با خط زمین می‌سازد، مسطحه فرجه‌ای

(ش ۱۵)

است که صفحه قائم مفروض با صفحه قائم تصویر تشکیل می‌دهد؛ زیرا که هر دو ضلع آن، xy و αP ، بر فصل مشترک صفحات مذکور عمودند؛ پس زاویه بین هر صفحه قائم و صفحه قائم تصویر، همان زاویه بین اثر افقی آن و خط زمین است.

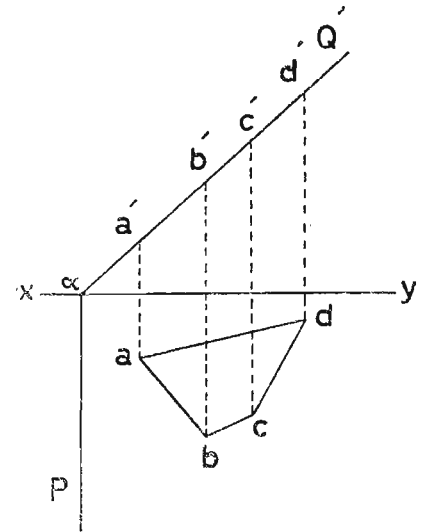
تمرین ۱ - تحقیق کنید جبهیه‌های صفحه قائم، چگونه خطوطی هستند.

تمرین ۲ - در صفحه قائم مفروضی تصویر قائم نقطه‌ای داده شده است؛ تصویر افقی آن را بدست آورید. آیا ممکن است به جای تصویر قائم، تصویر افقی داده شود و تصویر قائم را معین کنیم؟ برای اینکه قسمت آخر تمرین را بتوان حل کرد، علاوه بر تصویر افقی نقطه چه شرطی باید داده شود؟

تمرین ۳ - بر نقطه مفروض aa' صفحه قائمی بگذرانید که با صفحه قائم تصویر زاویه 30° بسازد. مسئله چند جواب دارد؟

۲۳ - صفحه منتصب

(شکل ۱۶) ، عمود است بر صفحه قائم تصویر. اثر افقی آن، عمود است بر xy و اثر قائمش غیر مشخص است. تصویر قائم صفحه منتصب خطی است مستقیم که مکان هندسی تصاویر قائم همه نقاط و خطوط صفحه است. زاویه صفحه منتصب با صفحه افقی تصویر، مساوی زاویه بین اثر قائم آن و خط زمین است.



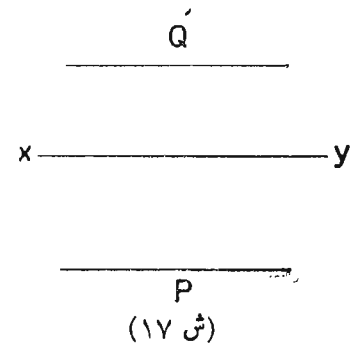
(ش ۱۶)

تمرین ۱- فرق یا شباهت بین صفحه منتصب و صفحه افقی چیست ؟ همچنین بین صفحه جبهی و صفحه قائم ؟

تمرین ۲- در صفحه منتصب مفروض، نقطه ای به ارتفاع h بدست آورید (عده جوابها؟) ؛ آیا ممکن است این مسئله را در مورد صفحه افقی مفروض حل کرد ؟

۲۴ - صفحه مواجهه (شکل ۱۷)،

موازی است با خط زمین. پس هر دو اثرش با آن موازیند (زیرا که اگر فرضاً صفحه و خطی متوازی باشند، هر صفحه دیگر که بر خط مرور کرده و صفحه مفروض را قطع کند، فصل



(ش ۱۷)

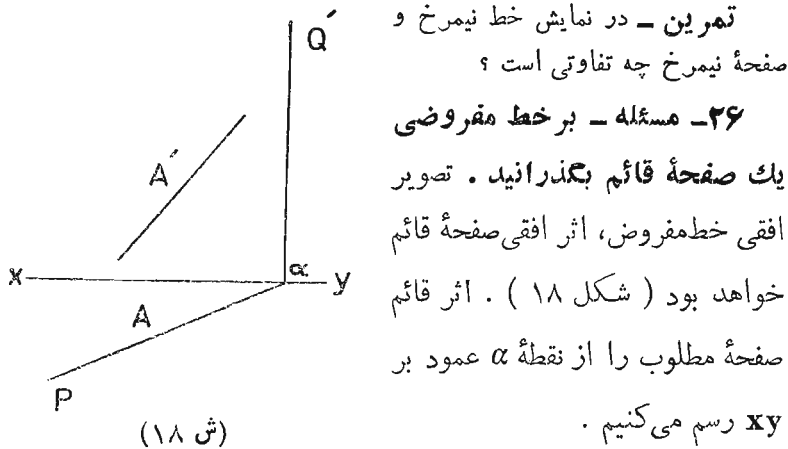
مشترك، با خط مفروض موازی خواهد بود) .

تمرین ۱- در نمایش يك خط مواجه و يك صفحه مواجه چه تفاوتی است ؟

تمرین ۲- بريك خط غیر مشخص، صفحه مواجهي بگذرانید و آثارش را رسم کنید. مسئله را در مورد خط نیمرخ نیز حل کنید.

تمرین ۳- خط بزرگترین شیب يك صفحه مواجه را نسبت به صفحه افقی تصویر بدست آورید. این خط چگونه خطی خواهد بود؟ آیا بین خطوط بزرگترین شیب يك صفحه مواجه نسبت به صفحات تصویر ارتباطی هست ؟ تحقیق کنید که خطوط بزرگترین شیب صفحات افقی، جبهی، قائم و منتصب نسبت به صفحات تصویر چگونه خطوطی هستند ؟

۲۵ - صفحه نیمرخ، بطوری که در فصل اول دیده ایم، عمود است بر xy و آثارش بر امتداد یکدیگر و بر xy عمودند.



(ش ۱۸)

تمرین - در نمایش خط نیمرخ و صفحه نیمرخ چه تفاوتی است ؟

۲۶ - مسئله - بر خط مفروضی

يك صفحه قائم بگذرانید. تصویر افقی خط مفروض، اثر افقی صفحه قائم خواهد بود (شکل ۱۸). اثر قائم صفحه مطلوب را از نقطه α عمود بر xy رسم می کنیم.

تمرین - بر خط مفروض AA' صفحه ای بگذرانید که زاویه بین تصویر قائم اثر قائم و تصویر افقی اثر افقی φ باشد. مثال عددی :

$$\varphi = 30^\circ, \varphi = 60^\circ, \varphi = 90^\circ$$

خلاصه مطالب مهم :

۱ - صفحه با سه نقطه غیر واقع بر يك استقامت مشخص می شود، یا بایك خط و يك نقطه در خارج آن، یا با دو خط متقاطع یا با دو خط متوازی.

۲- اگر يك تصوير يکي از خطهای صفحه‌ای داده شده باشد ، تصوير ديگر آن را به اين ترتيب بدست می‌آوریم که نقاط تلاقی تصوير معلوم را با تصاویر دوخط از صفحه تعیین می‌کنیم و تصوير ديگر هر نقطه را به وسیله رسم رابط بدست می‌آوریم و دو نقطه‌ای را که به اين ترتيب بدست می‌آیند به هم وصل می‌کنیم .

۳- اگر يك تصوير يك نقطه صفحه داده شده باشد ، خطی بر آن می‌گذرانیم و تصوير ديگر خط را معین می‌کنیم و تصوير ديگر نقطه را به وسیله رابط بر تصوير اين خط مشخص می‌سازیم .

۴- خطهای مهم يك صفحه عبارتند از : افقیه‌ها ، جبهیه‌ها ، اثر افقی ، اثر قائم ، فصل مشترکها با نیمساز فرجه‌های اول و دوم ، و خطهای بزرگترین شیب نسبت به صفحات تصوير .

۵- آثار صفحه یا با xy موازیند یا یکدیگر را در روی xy قطع می‌کنند .

۶- برای تعیین نقطه‌ای از صفحه به بعد و ارتفاع معین ، باید جبهیه‌ای به آن بعد و افقیه‌ای به آن ارتفاع رسم کرد تا یکدیگر را قطع کنند .

۷- تصوير افقی خط بزرگترین شیب نسبت به صفحه افقی ، عمود است بر تصوير افقی افقیه‌ها و بر اثر افقی ؛ تصوير قائم آن را باید بدست آورد . تصوير قائم خط بزرگترین شیب نسبت به صفحه قائم ، عمود است بر تصوير قائم جبهیه‌ها .

۸- اهمیت خط بزرگترین شیب در اين است که بنهایی برای مشخص کردن صفحه کافی است .

۹- صفحات مهم عبارتند از : الف - افقی ، که اثر قائمش با xy موازی است و اثر افقی ندارد . ب - جبهی ، که اثر افقیش موازی با xy است و اثر قائم ندارد . ج - قائم ، که اثر قائمش عمود است بر xy . د - منتصب ، که اثر افقیش عمود است بر xy . ه - مواجه ، که هر دو اثرش با xy موازیند . و - نیمرخ ، که آثارش بر يك امتداد و عمودند بر xy .

۱۰- تصوير افقی صفحه قائم یا جبهی ، يك خط است که همان اثر افقی آن است ؛ تصاویر افقی همه نقاط صفحه بر روی اثر افقی قرار دارند . تصوير قائم صفحه منتصب یا افقی ، يك خط است که همان اثر قائم آن است .

تمرین

۱- آثار صفحه‌ای را که بر يك خط و يك نقطه می‌گذرد ، در این حالتها بدست آورید :

الف - نقطه غیر مشخص و خط افقی یا جبهی . ب - نقطه غیر مشخص و خط قائم یا منتصب . ج - نقطه غیر مشخص و خط مواجه یا نیمرخ . د - نقطه در صفحه نیمساز دوم و خط منتصب یا قائم . ه - نقطه بر خط زمین و خط مواجه . و - نقطه بر خط زمین و خط نیمرخ .

۲- آثار صفحه‌ای را که بر دوخط متقاطع می‌گذرد ، در این حالتها بدست آورید :

الف - دو خط غیر مشخص . ب - یکی افقیه و دیگری جبهیه . ج - يك افقیه و يك غیر مشخص . د - يك افقیه و يك قائم (شرط امکان؟) . ه - يك جبهیه و يك قائم (شرط امکان؟) . و - يك مواجه و يك غیر مشخص . ز - دو مواجه . ح - دوخط که یکدیگر را روی xy قطع کرده باشند . ط - دوخط که یکی از آنها تصاویرش بر هم منطبق باشند . ی - دوخط که تصاویر غیر-همنامشان بر هم منطبق باشند . ک - يك نیمرخ و يك خط غیر مشخص . ل - دو نیمرخ . م - دو خط که آثارشان خارج حدود شکل باشند . ن - هر يك از دوخط ، با يك نیمساز فرجه موازی باشد .

۳- چهار نقطه داده شده‌اند ؛ تحقیق کنید که آیا هر چهار در يك صفحه‌اند؟

۴- در صفحه‌ای که به آثارش نموده شده است ، خطوط زیر را رسم کنید : يك افقیه ، يك جبهیه ، يك قائم ، يك منتصب ، يك مواجه ، يك نیمرخ . تحقیق کنید که آیا حل این مسئله در تمام حالات و برای تمام صفحات ممکن است یا نیست ؟ اگر نیست ، تعیین کنید که رسم هر يك از خطوط ، در مورد چه نوع صفحه‌ای مقدور است .

۵- بر خط AA' يك صفحه قائم ، يك صفحه منتصب ، يك صفحه افقی ، يك صفحه جبهی ، يك صفحه مواجه و يك صفحه نیمرخ مرور دهید ، در حالی که AA' غیر مشخص ، افقیه ، قائم ، منتصب ، یا نیمرخ باشد .

تحقیق کنید که مسئله در تمام حالات و برای تمام خطوط ممکن است یا نیست . تعیین کنید که بر هر يك از خطوط ، چگونه صفحاتی می‌توان مرورداد .

۶- يك نقطه A به بعد ۲ و ارتفاع ۳ معین کنید . بر آن، صفحه منتصبی بگذرانید که با صفحه تصویر زاویه 30° درجه بسازد و آثارش خط زمین را در طرف راست رابط A قطع کنند . در این صفحه نقطه B را به بعد و ارتفاع ۴ معین کنید و فصل مشترك AB را با صفحات نیمساز فرجه بدست آورید .

۷- صفحه مثلثی بر خط زمین می گذرد؛ تصاویر افقی سه رأس آن و تصویر قائم يك رأسش داده شده است؛ ملخص مثلث را رسم کنید .

۸- صفحه مثلثی منتصب است؛ a' و b' و c' تصاویر قائم سه رأس آن و تصویر افقی یکی از آنها، مثلاً a ، داده شده اند و می دانیم که تصویر افقی مثلث، مثلثی متساوی الاضلاع است . ملخص آن را رسم کنید .

راهنمایی - از a عمودی بر رابط يك رأس دیگر، مثلاً B ، فرود آورید تا آن را در I قطع کند، $aH = aI$ را چنان بسازید که با aI زاویه 60° بسازد؛ از H عمودی بر Ha اخراج کنید تا رابط رأس C را در c قطع کند؛ $Ib = Hc$ را بر رابط B جدا کنید؛ مثلث متساوی الاضلاع abc مطلوب است .

۹- صفحه مثلث ABC جبهی است؛ a و b و c تصاویر افقی سه رأس و تصویر قائم يك رأس، مثلاً a' ، در دست است؛ می دانیم که تصویر قائم مثلث، مثلثی است متساوی الساقین که رأسش a' و زاویه رأسش 45° درجه است؛ تصویر قائم ABC را بسازید .

۱۰- تصاویر افقی رئوس يك پنج ضلعی مستوی و تصویر قائم سه رأس آن داده شده اند؛ ملخص پنج ضلعی را بسازید .

۱۱- بر خط مفروض، صفحه ای بگذارید که مجموع زوایای هر دو اثرش با خط زمین، α باشد . مثال عددی: الف - $\alpha = 90^\circ$ ، ب - $\alpha = 60^\circ$ ، ج - $\alpha = 135^\circ$.

۱۲- بر خط مفروض، صفحه ای بگذارید که آثارش نسبت به خط زمین متقارن باشند .

۱۳- بر خط مفروض، صفحه ای مرور دهید که آثارش بر هم منطبق باشند .

۱۴- در صفحه مار بر دو خط متقاطع مفروض، جبهیه ای رسم کنید که

طول حقیقی جزئی از آن که بین دو خط مفروض واقع می شود، مساوی I باشد .

۱۵- سه نقطه A (۲ و ۳ و ۵) و B (۲ و ۴ و ۶) و G (۴ و ۱ و ۶) دو رأس و مرکز ثقل (محل تلاقی میانه های) مثلثی هستند؛ مثلث را رسم کنید .

۱۶- دو نقطه M (۲ و ۳ و ۵) و N (۱ و ۱ و ۵) اواسط دو ضلع مجاور و (۲ و ۳ و ۵) O مرکز متوازی الاضلاعی هستند؛ آن را بسازید .

۱۷- بعد دو نقطه A و B برابر ۵ و فاصله حقیقی آنها I و ارتفاع A مساوی ۵ است؛ به فرض اینکه موضع a' و b معلوم باشند، a' و b' را بدست آورید .

۱۸- نقطه M (۲ و ۵ و ۵) و نقطه N (۰ و ۳ و ۱ -) داده شده اند . بر خط MN صفحه ای بگذارید که آثارش خط زمین را در α قطع کند و طول $\alpha m'$ دو برابر طول αn باشد .

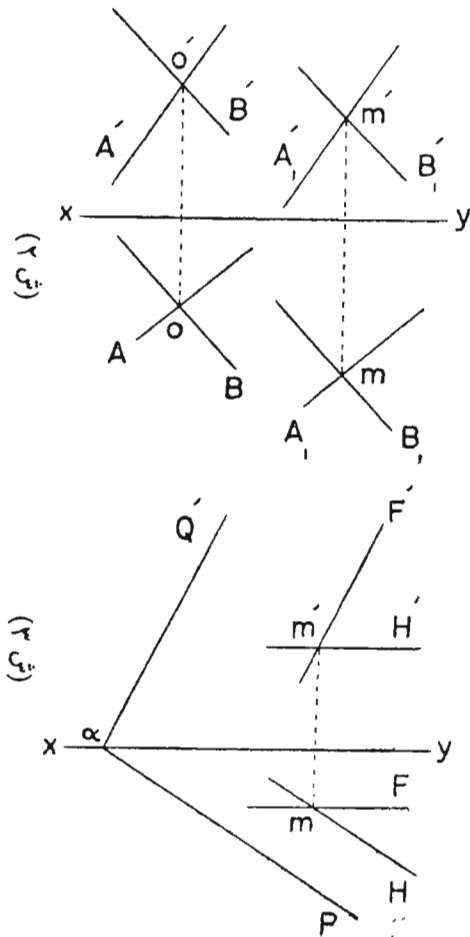
۱۹- نقطه A (۲ و ۳ و ۵) يك رأس متوازی الاضلاعی است با این مشخصات: صفحه متوازی الاضلاع، قائم است و با صفحه تصویر زاویه 45° درجه می سازد و خط زمین را طرف چپ رابط aa' قطع می کند؛ ضلع AB افقیه است و طول $AB = 3$ و A طرف راست B است؛ ارتفاع مرکز متوازی - الاضلاع مساوی ۴ و بعد رأس C مساوی ۱ است؛ متوازی الاضلاع را بسازید .

۲۰- تصویر قائم متوازی الاضلاعی مربع است و تصاویر افقی سه رأس و تصویر قائم يك رأس آن داده شده اند؛ ملخص آن را رسم کنید .
راهنمایی - از تمرین ۸ استفاده شود .

۴- از نقطه mm' صفحه‌ای به موازات صفحه مفروضی

رسم کنید .

اگر صفحه مفروض به وسیله دو خط متقاطع نموده شده باشد ،
از mm' دو خط به موازات آنها رسم می‌کنیم ؛ دو خط اخیر ، صفحه
مطلوب را مشخص می‌سازند (شکل ۲) .



هرگاه صفحه به وسیله
آثار مشخص باشد ، از
نقطه mm' افقیه وجبیه‌ای
بترتیب موازی با اثر افقی
و اثر قائم آن رسم می‌کنیم ،
صفحه $FHF'H'$ صفحه
مطلوب است (شکل ۳) .

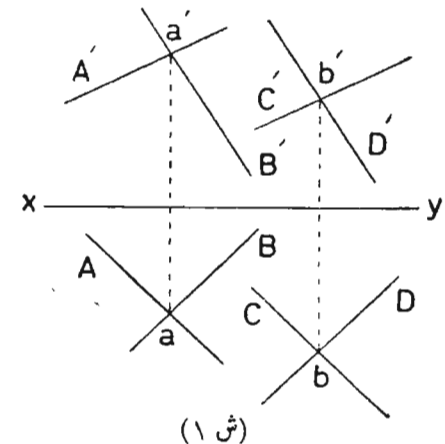
ولی ممکن است که
به جای رسم دو خط افقی و
جبیه فقط یکی از آنها را
رسم کرده به کمک آن ، آثار
صفحه مطلوب را بدست
آوریم ؛ بدین ترتیب که
از mm' افقیه‌ای موازی با
اثر افقی صفحه مفروض

اوضاع مختلف خط و صفحه

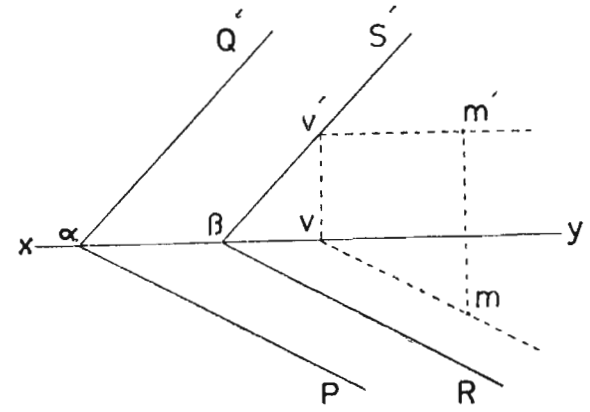
۱- اوضاع مختلف دو صفحه

۱- دو صفحه ممکن است متوازی یا متقاطع باشند .
۲- شرط توازی دو صفحه این است که دو خط متقاطع یکی با
دو خط متقاطع دیگری موازی باشند . در شکل ۱ ، صفحه‌ای که بر
دو خط AA' و BB' می‌گذرد ، با صفحه‌ای که بر دو خط CC' و DD'
مرور می‌کند ، موازی است .

۳- می‌دانیم که فصل مشترکهای يك صفحه با دو صفحه متوازی ،
دو خط متوازیند ؛ بنا بر این ، آثار افقی دو صفحه متوازی ، متوازیند و
همچنین است آثار قائمشان ؛ و
نیز افقیه‌های دو صفحه متوازی
با هم و جبیه‌های آنها نیز
با هم موازیند . پس دو صفحه
(غیر مواجه) که با آثارشان
نموده شده باشند ، وقتی
متوازیند که آثار همنامشان
متوازی باشند .



می کشیم (شکل ۴)
و vv' اثر قائم آن
را بدست می آوریم،
اثر قائم صفحه
مطلوب بر v' می-
گذرد و با $\alpha Q'$
موازی است؛ آن
را رسم کرده $\beta S'$

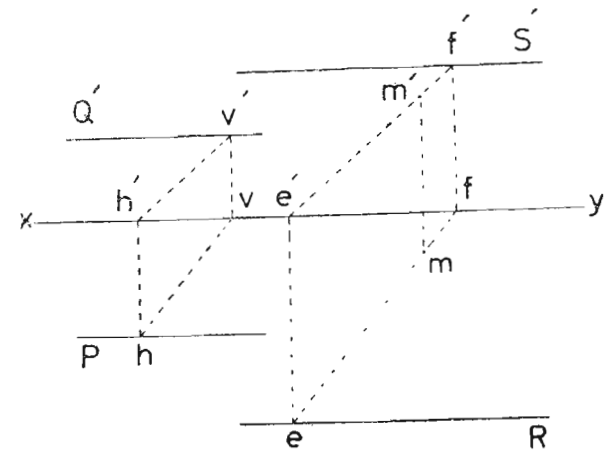


(ش ۴)

می نامیم و از β خط βR ، اثر افقی صفحه مطلوب، را موازی با αP می کشیم.

۵- تبصره - به جای استفاده از افقیه یا جبهیه صفحه مطلوب، ممکن است از يك خط غیر مشخص آن استفاده کنیم.

بدین معنی که در صفحه مفروض $P\alpha Q'$ خط غیر مشخصی رسم کنیم و از mm' خطی به موازات آن کشیده آثار این خط را بیابیم و از این آثار، دو اثر صفحه مطلوب



(ش ۵)

اثر صفحه مطلوب
را موازی با آثار
صفحه مفروض رسم
کنیم. این طریقه،
بخصوص، در رسم
صفحه موازی با
صفحه مواجه بکار
می رود (شکل ۵).
توضیح آنکه اگر

بخواهیم از mm' صفحه ای موازی با صفحه مواجه PQ' رسم کنیم،
نخست در صفحه PQ' خط دلخواهی مانند $hvh'v'$ رسم می کنیم؛
آنگاه از mm' خطی موازی با آن می کشیم و ee' و ff' آثار افقی و
قائم را بدست می آوریم؛ آثار صفحه مطلوب، بر این نقاط می گذرند و
با خط زمین موازیند.

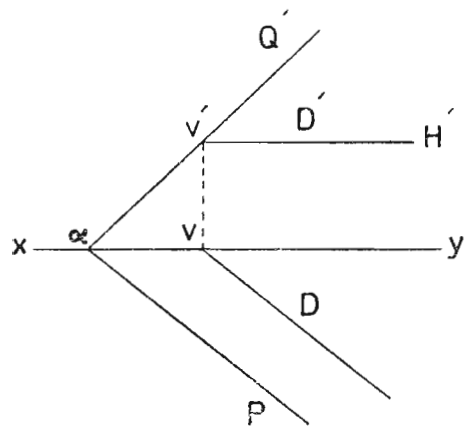
تمرین - از نقطه مفروض، صفحه ای به موازات صفحات زیر رسم کنید:
الف - صفحه افقی. ب - صفحه جبهی. ج - صفحه قائم. د - صفحه منتهی.
ه - صفحه نیمرخ.

۶- صفحات متقاطع - دو صفحه غیر موازی، یکدیگر را قطع
می کنند و فصل مشترك آنها خطی است مستقیم.

I - حالت های خاص

الف - فصل مشترك يك صفحه با صفحات تصویر عبارت است
از آثار افقی و قائم آن.

ب - فصل مشترك يك صفحه افقی با يك صفحه غیر مشخص -
هرگاه بخواهیم فصل مشترك صفحه افقی H' با صفحه $P\alpha Q'$ (شکل ۶)



(ش ۶)

را بدست آوریم، کافی است
که توجه کنیم که چون فصل
مشترك در صفحه افقی H'
است، خطی است افقی که
تصویر قائمش، D' ، بر H'
منطبق است؛ پس فصل مشترك،
افقیه ای است از صفحه $P\alpha Q'$
که تصویر قائمش در دست

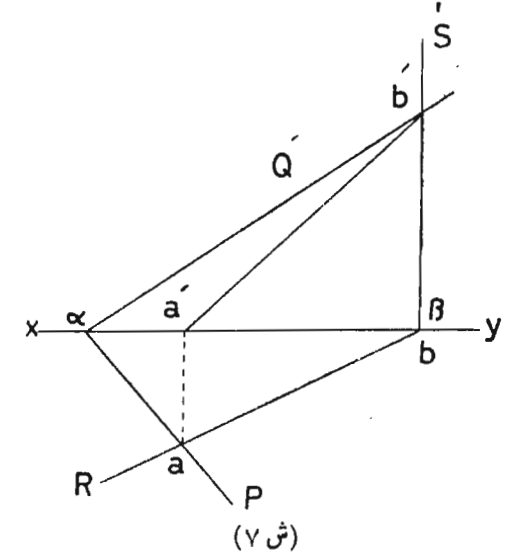
است و تصویر افقیش با سانی تعیین می شود (شکل ۶)، به این ترتیب که D' اثر قائم صفحه را در v' قطع می کند؛ تصویر افقی، v ، را روی xy بدست آورده از v خط D را موازی با اثر افقی رسم می کنیم.

تمرین - فصل مشترك يك صفحه جبهی را با يك صفحه غیر مشخص بدست آورید .

ج - فصل مشترك يك صفحه قائم با يك صفحه غیر مشخص -
این حالت شبیه به حالت ب است؛ زیرا که چون فصل مشترك در صفحه

قائم است، تصویر افقیش بر اثر افقی صفحه قائم واقع می شود؛ بنا بر این، تصویر افقی خطی از صفحه $P\alpha Q'$ را داریم و تصویر قائم آن را پیدا می کنیم (شکل ۷، $aba'b'$).

تمرین - فصل مشترك صفحه منتصبی را با صفحه غیر مشخص بدست آورید .

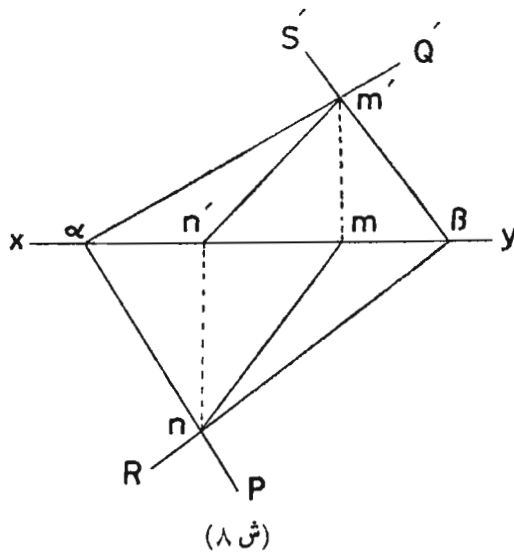


II - حالت عمومی

از دو صفحه کمکی برای بدست آوردن فصل مشترك استفاده می کنیم. صفحات کمکی که در هندسه ترسیمی اختیار می کنیم، یا صفحات افقی و قائم تصویر هستند یا صفحات افقی و جبهی؛ گاهی هم از صفحات قائم و منتصب، و بندرت از صفحات نیمرخ، استفاده می شود. اینک چند مثال:

مثال ۱ - مطلوب است فصل مشترك دو صفحه غیر مشخص $R\beta S'$ و $P\alpha Q'$.

الف - وقتی که آثار همنام دو صفحه در حدود شکل متقاطعند (شکل ۸)، صفحه افقی تصویر را یکی از صفحات کمکی اختیار می کنیم؛ این صفحه کمکی، صفحه $P\alpha Q'$ را در امتداد αP و صفحه $R\beta S'$ را در امتداد βR قطع می کند و نقطه تلاقی αP و βR یعنی nn' يك نقطه از فصل مشترك

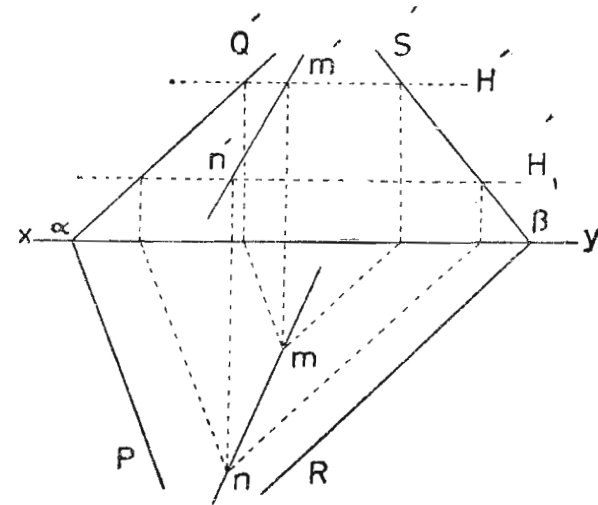


از فصل مشترك مطلوب است. صفحه قائم تصویر، که صفحه دوم کمکی اختیار می شود، صفحات مفروض را بر فصل مشتركهای $\alpha Q'$ و $\beta S'$ قطع

می کند و این دو خط یکدیگر را در mm' تلاقی می کنند؛ $mm'n'$ فصل مشترك دو صفحه مفروض است.

ب - وقتی که آثار همنام دو صفحه در خارج حدود شکل متقاطع باشند (شکل ۹)، استفاده از صفحات تصویر به عنوان صفحات کمکی مقدور نیست. در این صورت يك صفحه افقی، مانند H' را کمکی اختیار می کنیم و فصل مشتركهای آن را با $P\alpha Q'$ و $R\beta S'$ بدست می آوریم؛ این دو فصل مشترك یکدیگر را در mm' ، که يك نقطه از

فصل مشترك دو صفحه مفروض است، قطع می کنند؛ يك نقطه دیگر nn' به وسیله صفحه كمکی دیگری، كه آن هم افقی یا جیبی اختیار می شود، بدست می آید؛ $mnm'n'$ فصل مشترك دو صفحه مفروض است.

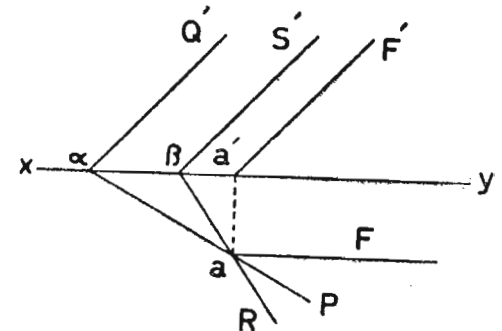


(ش ۹)

ج - وقتی كه آثار قائم دو صفحه متوازیند، فصل مشترك آنها موازی است با آثار مذکور (زیرا كه هرگاه سه صفحه دو بدو يكدیگر را قطع كنند و دوتا از فصل مشتركهای آنها متوازی باشند، سومی هم با آنها موازی است)؛ پس برای رسم فصل مشترك مطلوب، داشتن يك نقطه آن

كافی است؛ این نقطه از تلاقی آثار افقی آنها بدست می آید (شكل ۱۰)؛ آن را

aa' می نامیم و آن را جبهه FF' را موازی با آثار قائم صفحات

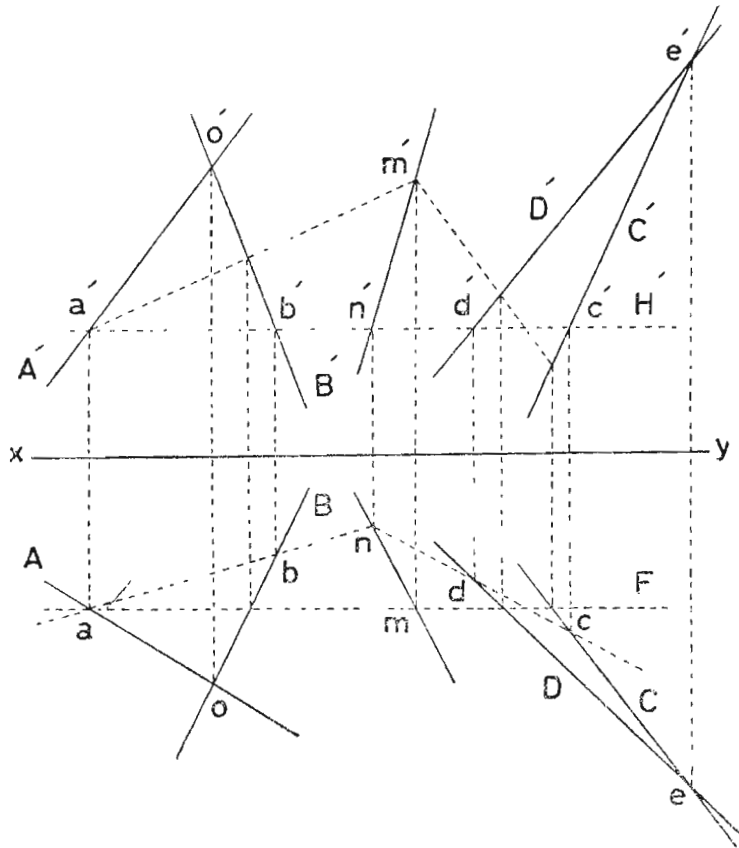


(ش ۱۰)

مفروض رسم می کنیم؛ این جبهه فصل مشترك مطلوب است.

مثال ۲ - مطلوب است فصل مشترك دو صفحه كه به وسیله خطوط متقاطع نموده شده اند (شكل ۱۱).

در این حالت، صفحات كمکی، افقی یا جیبی اختیار می شوند.



(ش ۱۱)

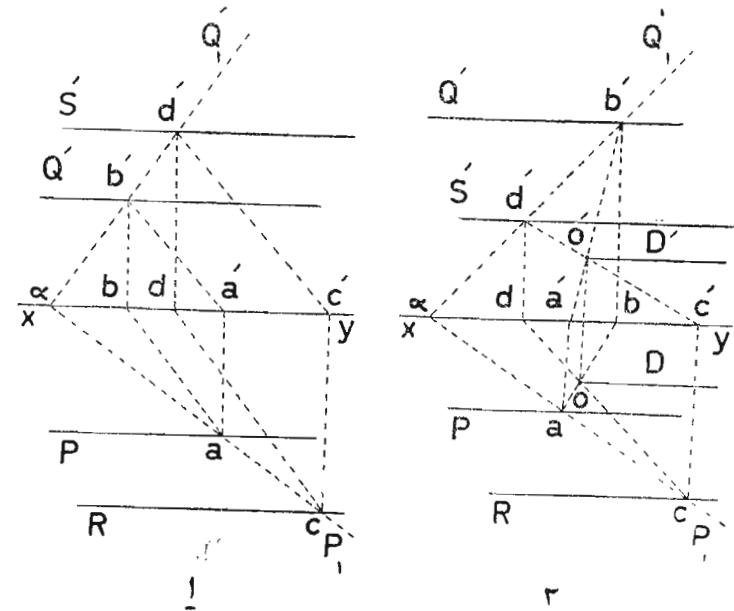
شكل ۱۱، صفحه افقی H' را كمکی اختیار کرده $aba'b'$ ، فصل مشترك آن را با صفحه $ABA'B'$ ، و $cdc'd'$ ، فصل مشترك آن را با صفحه

$CDC'D'$ ، تعیین کرده ایم ؛ این دو خط یکدیگر را در nn' قطع کرده اند ؛ صفحه کمی جبهی F نیز نقطه mm' را بدست می دهد ؛ فصل مشترك دو صفحه است .

تمرین - فصل مشترك این صفحات را بدست آورید : الف - يك صفحه افقی و يك صفحه جبهی . ب - صفحه افقی (یا جبهی) و يك صفحه مواجه . ج - يك صفحه افقی یا جبهی و يك صفحه نیمرخ . د - صفحه نیمرخ و يك صفحه غیر مشخص . ه - يك صفحه نیمرخ و يك صفحه مواجه .

مثال ۳ - دو صفحه مواجه PQ' و RS' داده شده اند ؛ تحقیق کنید که متوازیند یا متقاطع .

اگر دو صفحه مواجه یکدیگر را قطع کنند ، فصل مشتركشان خطی است مواجه ؛ پس برای رسم آن ، يك نقطه کافی است و فقط به يك صفحه کمی احتیاج داریم . بنا بر این ، صفحه کمی $P, \alpha Q'$ (شکل ۱۲) را مرور داده فصل



(ش ۱۲)

مشترکهای آن را با صفحات مواجه PQ' و RS' بدست آورده بترتیب $aba'b'$ و $cde'd'$ می نامیم ؛ اگر $aba'b'$ و $cde'd'$ متوازی شوند (شکل ۱۲-۱) ، دو صفحه مواجه متوازیند ؛ اگر $aba'b'$ و $cde'd'$ متوازی نشوند و یکدیگر را در نقطه oo' (شکل ۱۲-۲) قطع کنند ، دو صفحه مفروض ، متقاطعند و فصل مشتركشان خط مواجه DD' است که از oo' می گذرد .

تمرین ۱ - در وضع دو صفحه مواجه به كمك يك صفحه نیمرخ تحقیق کنید .

تمرین ۳ - فصل مشترك دو صفحه P و P' را در حالت های زیر بدست آورید :

الف - P به وسیله آثارش و P' به وسیله يك خط بزرگترین شیب مشخص است . ب - P به وسیله دو خط متقاطع و P' به وسیله خط بزرگترین شیب نسبت به صفحه قائم معین گردیده است . ج - P غیر مشخص و P' یکی از صفحات نیمساز فرجه است . د - P به وسیله سه نقطه و P' به وسیله خط زمین و يك نقطه معین است . ه - P قائم (یا منتصب) و P' یکی از نیمسازها است . و - P و P' به وسیله آثارشان مشخصند و آثار غیر همنامشان بر هم منطبقند .

۲ - اوضاع مختلف خط و صفحه

۷ - خط ممکن است در صفحه باشد ، یا با آن موازی باشد ، یا آن را قطع کند .

شرط آنکه خطی در صفحه ای باشد این است که دو نقطه اش

-۱۹۶-

در آن صفحه باشند .

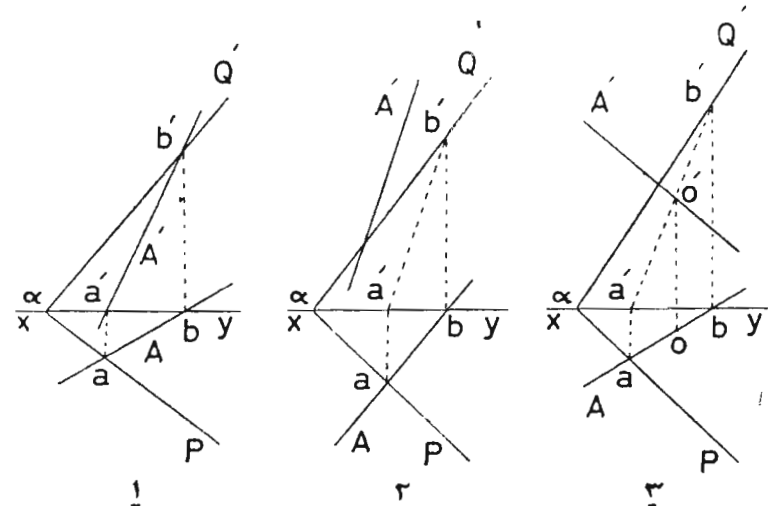
شرط آنکه خطی با صفحه‌ای موازی باشد این است که بایکی از خطوط آن صفحه موازی باشد .

اگر خطی نه در صفحه و نه با آن موازی باشد ، آن را قطع می‌کند .

۸ - مسئله - وضع خط AA' را نسبت به صفحه $P\alpha Q'$ تحقیق کنید .

از A' ، تصویر قائم ، بطور موقت صرف نظر کرده A را تصویر افقی خطی از صفحه $P\alpha Q'$ (شکل ۱۳) فرض می‌کنیم و $a'b'$ تصویر قائم آن را بدست می‌آوریم ؛ سه حالت ممکن است اتفاق افتد :

حالت اول ، $a'b'$ بر A' منطبق شود (شکل ۱۳-۱) ؛ در این صورت ، خط AA' در صفحه مفروض است .



(ش ۱۳)

-۱۹۷-

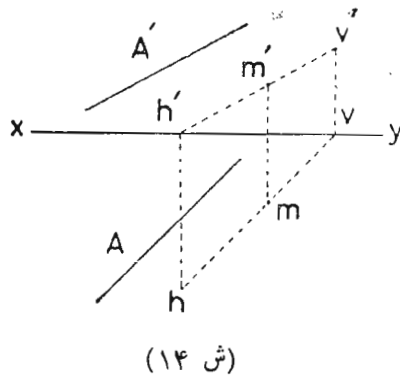
حالت دوم ، $a'b'$ با A' موازی شود (شکل ۱۳-۲) ؛ در این صورت ، خط AA' با خط $aba'b'$ از صفحه $P\alpha Q'$ موازی است ، یعنی با آن صفحه موازی است .

حالت سوم ، $a'b'$ خط A' را قطع می‌کند ؛ در این صورت ، خط AA' صفحه را قطع می‌کند (شکل ۱۳-۳) و محل تلاقی آن با صفحه است .

تمرین ۱- از نقطه aa' خطی به موازات صفحه $P\alpha Q'$ مرور دهید . مسئله چند جواب دارد ؟ مکان هندسی آن چیست ؟ این مکان را رسم کنید .

تمرین ۲- از نقطه مفروضی خطی به موازات صفحه مفروض رسم کنید بقسمی که تصویر افقیش با خط زمین زاویه ϕ بسازد . مسئله چند جواب دارد ؟

تمرین ۳- از نقطه aa' خطی رسم کنید که با صفحات $P\alpha Q'$ و $R\beta S'$ موازی باشد .



(ش ۱۴)

۹- مسئله - از نقطه mm' صفحه‌ای به موازات خط AA' بگذرانید .

از mm' خطی موازی با AA' رسم می‌کنیم (شکل ۱۴) و vv' و hh' آثار قائم و افقی آن را بدست می‌آوریم ؛ هر صفحه که آثار

افقی و قائمش بترتیب بر hh' و vv' بگذرد ، با AA' موازی است . مسئله جوابهای بیشمار دارد .

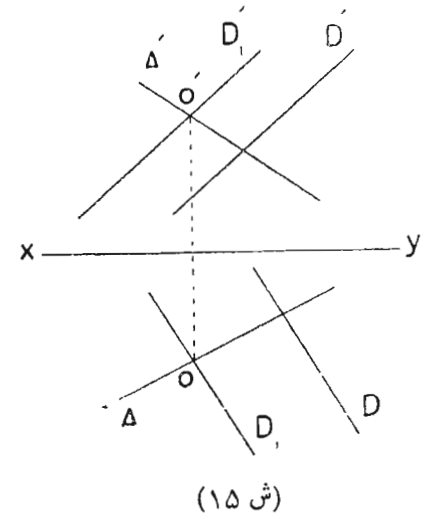
تمرین - از نقطه aa' صفحه‌ای به موازات دو خط BB' و CC' بگذرانید .

۱۰- مسئله - بر خط $\Delta\Delta'$ صفحه‌ای موازی با خط DD' مرور

دهید .

از يك نقطه oo' واقع بر خط $\Delta\Delta'$ ، خط $D'D'$ را موازی با DD'

رسم می‌کنیم ؛ صفحه‌ای که بر $D'D'$ و $\Delta\Delta'$ بگذرد ، جواب مسئله است (شکل ۱۵) .



تمرین - الف - بر نقطه aa' يك خط افقی موازی با صفحه قائم مفروض بگذرانید . ب - بر نقطه مفروض ، صفحه قائمی (یا منتصبی) موازی با خط مفروض مرور دهید . ج - بر نقطه مفروض ، صفحه‌ای موازی با نیمساز فرجه اول یا دوم مرور دهید .

(ش ۱۵)

فصل مشترك خط و صفحه

۱۱- حالت‌های خاص

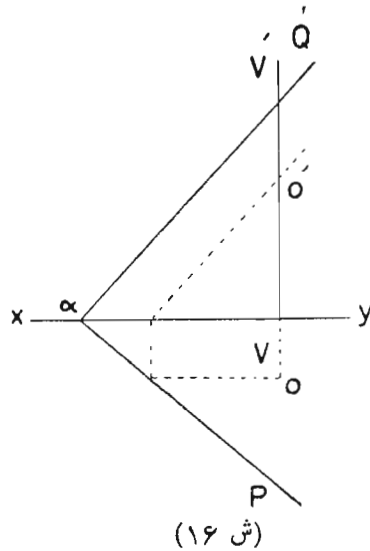
الف - فصل مشترك خط قائم VV' با صفحه PaQ' را بدست

آورید (شکل ۱۶) .

چون نقطه تقاطع ، بر روی خط قائم VV' است ، تصویر افقیش بر

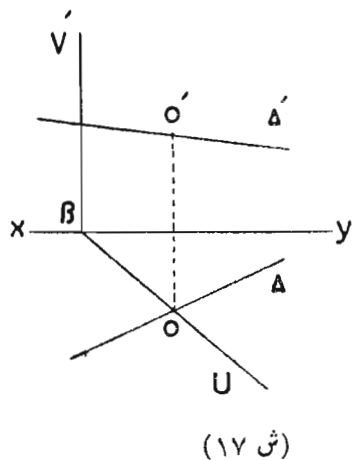
V واقع می‌شود و چون نقطه مذکور در صفحه PaQ' نیز هست ، مسئله

منجر می‌شود به اینکه تصویر افقی يك نقطه از صفحه‌ای داده شده است و بخواهیم تصویر قائم آن را بدست آوریم ؛ این عمل در شکل ۱۶ به کمک يك خط جیبی انجام داده شده است ؛ oo' نقطه تقاطع مطلوب است .



(ش ۱۶)

تمرین - نقطه تقاطع يك خط منتصب را با يك صفحه بدست آورید . ب - فصل مشترك خط غیر مشخص با صفحه قائم (شکل ۱۷) . چون فصل مشترك ، از يك طرف روی صفحه قائم است ، تصویر افقی آن بر روی βU ، اثر افقی صفحه ، واقع می‌شود و از طرف دیگر بر

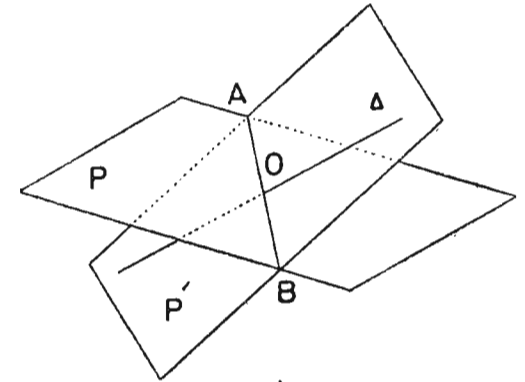


(ش ۱۷)

Δ قرار دارد ؛ پس o ، نقطه تلاقی Δ و βU ، تصویر افقی فصل مشترك است ؛ o' تصویر قائمش را به وسیله رابط روی Δ' بدست می‌آوریم .

تمرین - فصل مشترك يك خط غیر مشخص را با صفحات زیر بدست آورید : الف - صفحه منتصب . ب - صفحه افقی یا جیبی . ج - صفحه نیمرخ .

۱۲- حالت عمومی - در حالت کلی ، برای آنکه فصل مشترك خط



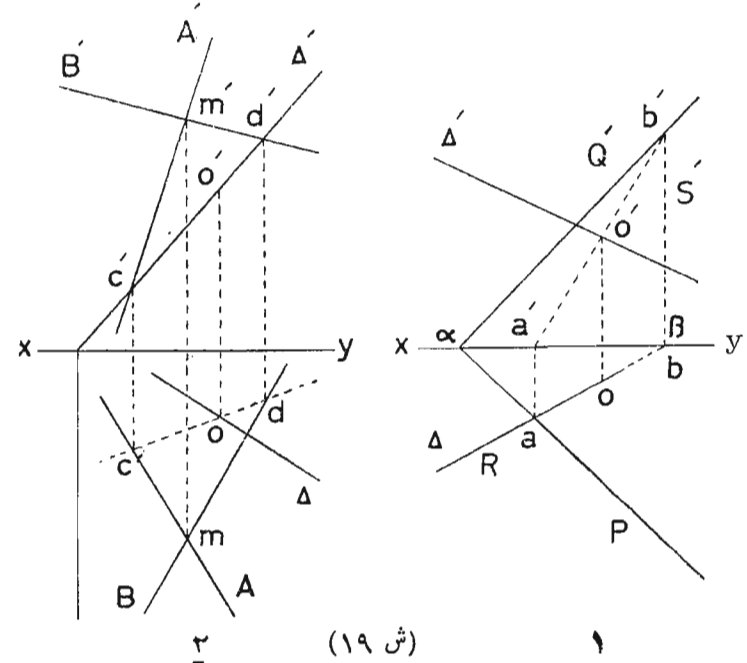
(ش ۱۸)

Δ را با صفحه P بدست آوریم (شکل ۱۸)، بر Δ يك صفحه دلخواه مانند P' می گذرانیم تا صفحه P را در امتداد AB قطع کند؛ AB و Δ که در صفحه P' هستند، یکدیگر را در O

تلاقی می کنند؛ O فصل مشترك خط Δ و صفحه P است.

در هندسه ترسیمی نیز بر خط، يك صفحه کمکی می گذرانیم؛ این صفحه را معمولاً قائم یا منتصب اختیار می کنیم که هم بتوان سهولت آثار آن را کشید و هم فصل مشتركش با صفحه مفروض سریعتر بدست آید.

الف - فصل مشترك $\Delta\Delta'$ با صفحه $P\alpha Q'$ (شکل ۱۹-۱) .



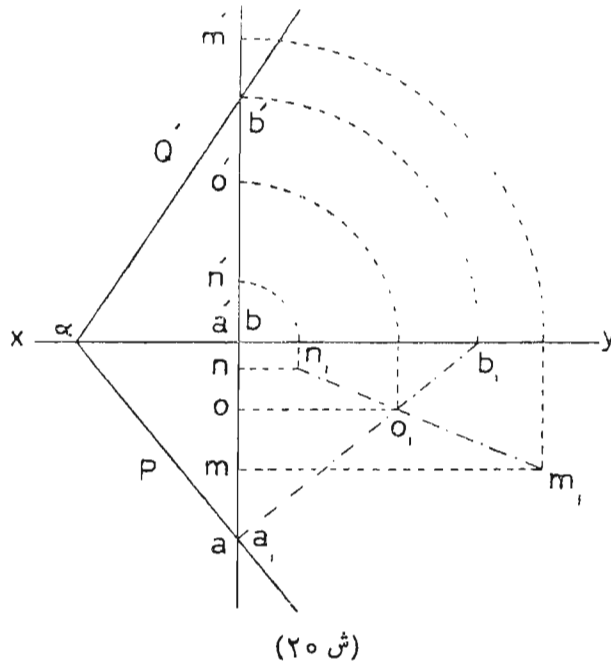
(ش ۱۹)

$\Delta\Delta'$ صفحه قائم RBS' را می گذرانیم؛ بطوری که می دانیم اثر افقی صفحه بر Δ منطبق و اثر قائم آن بر خط زمین عمود است؛ فصل مشترك دو صفحه، خط $aba'b'$ است. $a'b'$ با Δ' ، تصویر قائم خط مفروض، در نقطه o' تلاقی می کند؛ oo' فصل مشترك $\Delta\Delta'$ و صفحه $P\alpha Q'$ است.

ب - فصل مشترك خط $\Delta\Delta'$ با صفحه $ABA'B'$ (شکل ۱۹-۲) .

بر $\Delta\Delta'$ يك صفحه منتصب می گذرانیم؛ خط AA' این صفحه را در cc' و خط BB' آن را در dd' قطع می کند؛ تصویر افقی فصل مشترك صفحه مفروض با صفحه منتصبی است که بر $\Delta\Delta'$ گذشته است و تصویر افقی Δ را در o قطع می کند؛ oo' فصل مشترك $\Delta\Delta'$ است با صفحه مفروض.

ج - فصل مشترك نیمرخ $mn'm'n'$ با صفحه $P\alpha Q'$ (شکل ۲۰) . بر نیمرخ $mn'm'n'$ يك صفحه نیمرخ مرور می دهیم و



(ش ۲۰)

$aba'b'$ فصل مشترکش با صفحه $P\alpha Q'$ را پیدا می‌کنیم؛ آنگاه صفحه نیمرخ را تسطیح می‌کنیم؛ a_1b_1 و m_1n_1 ، تسطیحه‌های دو خط مذکور، یکدیگر را در o_1 قطع می‌کنند؛ o_1 را در oo' ترفیع می‌کنیم.

۱۴ - مسئله - دو خط Δ و D و نقطه M داده شده اند؛ بر M خطی بگذرانید که آن دو خط را قطع کند.

بر یکی از دو خط، مثلاً D ، و نقطه M صفحه‌ای مرور می‌دهیم تا Δ را در A قطع کند؛ AM که با خط D در یک صفحه است، آن را در B تلاقی می‌کند و AB خط مطلوب است (شکل ۲۱).

هرگاه Δ و D

متناظر باشند، مسئله

یک جواب دارد.

هرگاه Δ و D متقاطع

یا متوازی باشند،

اگر M در صفحه

آنها باشد، عدد

(ش ۲۱)

جوابها بیشمار است، یعنی هر خطی که در آن صفحه بر M بگذرد، جواب

مسئله است و اگر M در صفحه آنها نباشد، مسئله یک جواب دارد.

وقتی که Δ و D موازی باشند و M در صفحه آنها نباشد، خط مطلوب

با آنها موازی است.

ملخص - در صفحه‌ای که بر نقطه mm' و خط DD' بگذرد،

افقیه HH' را که بر mm' می‌گذرد، رسم می‌کنیم؛ بر $\Delta\Delta'$ صفحه قائمی

مرور می‌دهیم که خط DD' را در cc' و HH' را در ee' قطع کند؛ فصل مشترک صفحه $mDm'D'$ با صفحه قائم مار بر $\Delta\Delta'$ است؛ $c'e'$ با Δ' در نقطه a' تلاقی می‌کند؛ a را روی Δ بدست

می‌آوریم؛ خط

$ama'm'$ جواب

مسئله است و DD'

را در bb' قطع

می‌کند (شکل ۲۲).

تمرین ۱ - خطی

مرور دهید که بر

نقطه مفروضی بگذرد

و خط زمین و نیمرخ

مفروضی را قطع کند.

تمرین ۲ - سه خط

متناظر D_1 و D_2 و D_3

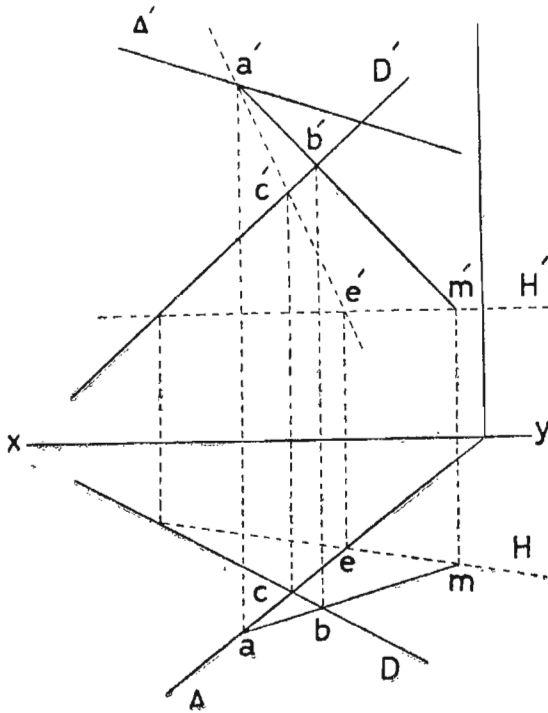
داده شده اند؛ خطی

چنان رسم کنید که

هر سه را قطع کند و

به وسیله نقاط تقاطع

به دو جزء متساوی تقسیم شود.



(ش ۲۲)

راهنمایی - خط دلخواهی رسم کنید که بین D_1 و D_2 محدود شود؛

از وسط این قطعه، صفحه‌ای موازی با D_1 و D_2 بکشید تا D_3 را در M قطع کند؛

آنگاه از مسئله شماره ۱۳ استفاده کنید.

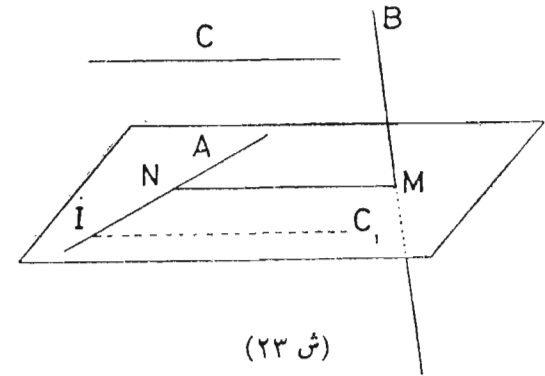
تمرین ۳ - سه خط متناظر و نقطه A داده شده اند؛ متوازی الاضلاع

$ABCD$ را چنان بسازید که A یک رأس آن باشد و دو رأس مقابل B و D

بر دو خط از خطوط مفروض و مرکز آن بر خط سوم واقع باشد.

۱۴- مسئله - سه خط متناظر A و B و C مفروضند؛ خطی موازی با C رسم کنید که A و B را قطع کند.

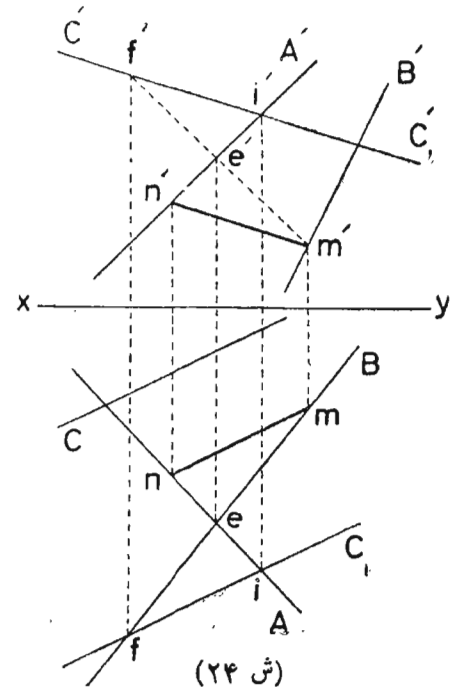
بر A صفحه‌ای به موازات C مرور می‌دهیم؛ به این ترتیب که از يك نقطه A مانند I خط C_1 را موازی با C رسم می‌کنیم و بر A و C_1 صفحه‌ای می‌گذرانیم؛



(ش ۲۳)

این صفحه خط B را M قطع می‌کند؛ از M خط MN را موازی با C می‌کشیم تا A را در N قطع کند؛ MN خط مطلوب است (شکل ۲۳).

ملخص - سه خط AA' و BB' و CC' مفروضند (شکل ۲۴). از نقطه ii' واقع بر خط AA' خط $C_1C'_1$ را موازی با CC' رسم می‌کنیم (برای صرفه جویی در رسم خط i' را در محل تلاقی A' و C' می‌کنیم تا C'_1 بر C' منطبق شود)؛ بر خط BB' صفحه‌قائمی مرور می‌دهیم (در شکل از اثر قائم این صفحه که مورد استفاده واقع نمی‌شود، صرف نظر شده

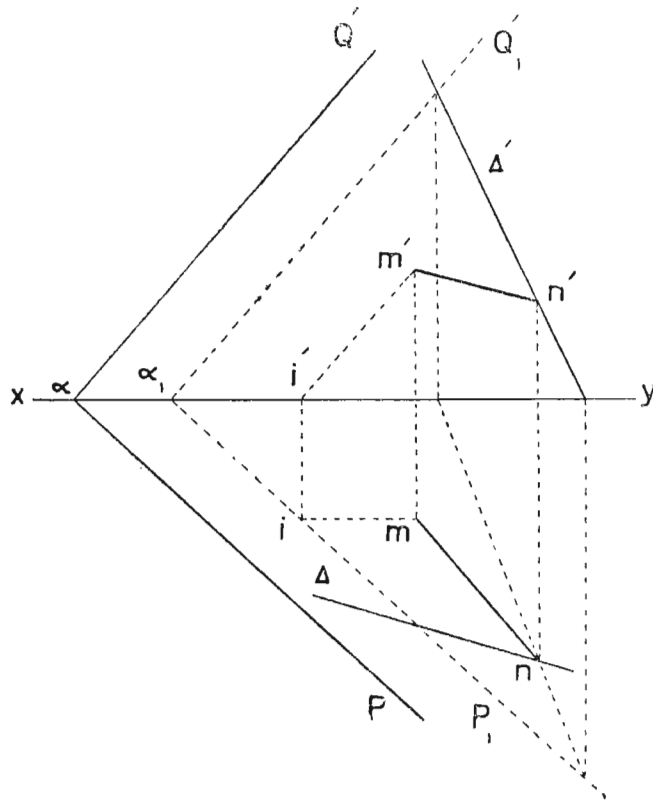


(ش ۲۴)

(است)؛ این صفحه قائم، خط AA' را در ee' و خط $C_1C'_1$ را در ff' قطع می‌کند؛ $e'f'$ با خط B' در m' تلاقی می‌کند و m را روی خط B بدست می‌آوریم؛ از mm' خط $mnmm'n'$ را موازی با CC' می‌کشیم تا AA' را در nn' قطع کند.

تمرین - مسئله شماره ۱۴ را در موقعی که A قائم و B منتصب و C غیر مشخص باشد، رسم کنید.

۱۵- مسئله - بر نقطه مفروض، خطی مرور دهید که با صفحه



(ش ۲۵)

مفروضی موازی باشد و خط مفروضی را قطع کند .

کافی است که بر آن نقطه صفحه‌ای به موازات صفحه مفروض رسم کرده نقطه تقاطعش با خط مفروض را بدست آوریم ؛ خطی که از نقطه اخیر به نقطه مفروض وصل شود ، جواب مسئله است .

ملخص - صفحه $P\alpha Q'$ و نقطه mm' و خط $\Delta\Delta'$ مفروضند (شکل ۲۵) ؛ از mm' جبهه‌ای موازی با $\alpha Q'$ ، اثر قائم صفحه مفروض ، رسم کرده ii' اثر افقی آن را بدست می‌آوریم ؛ از i خط αP را موازی با αP و از $\alpha Q'$ خط $\alpha Q'$ را موازی با $\alpha Q'$ می‌کشیم ؛ صفحه $P\alpha Q'$ بر نقطه mm' گذشته و موازی با $P\alpha Q'$ است .

فصل مشترك آن را با خط $\Delta\Delta'$ بدست آورده nn' نام می‌گذاریم ؛ خط $mm'n'n'$ جواب مسئله است .

تمرین ۱- نقطه مشترك سه صفحه P_1 و P_2 و P_3 را درحالات زیر بدست آورید :

الف - P_1 قائم و P_2 منتصب و P_3 افقی . ب - P_1 مواجه و P_2 نیمرخ و P_3 غیر مشخص . ج - P_1 برخط زمین و یک نقطه می‌گذرد و P_2 وسیله دوخط متقاطع مشخص است و P_3 مواجه است .

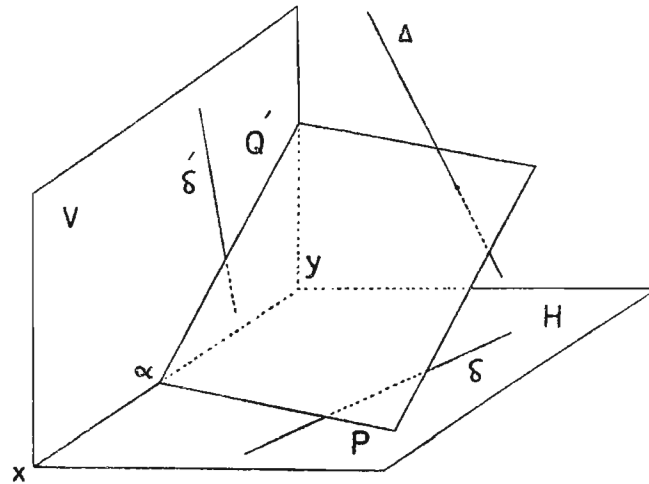
تمرین ۲- دوخط متوازی و دو خط متنافر اختیار کنید و خطی رسم کنید که هر چهار را قطع کند .

تمرین ۳- دو صفحه داده شده اند ؛ در یکی از آنها نقطه‌ای اختیار کنید و بر آن نقطه خطی مرور دهید که در آن صفحه واقع و با صفحه دیگر موازی باشد .

۲- خطوط و صفحات عمود برهم

۱۶- قضیه - درهندسه ترسیمی هرگاه خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، تصویر افقیش بر اثر افقی و تصویر افقی افقیه‌های صفحه و تصویر قائمش بر اثر قائم و تصویر قائم جبهه‌های صفحه عمود می‌شود .

برهان - هرگاه Δ بر صفحه $P\alpha Q'$ عمود باشد (شکل ۲۶) ،



(ش ۲۶)

بر اثر افقی آن نیز عمود است و با آن ، زاویه قائمه‌ای می‌سازد که يك ضلعش (اثر افقی) با صفحه افقی موازی است؛ پس تصویر افقی Δ بر اثر افقی صفحه عمود می‌شود؛ چون افقیه‌های صفحه با اثر افقی آن موازیند ، تصویر افقی Δ بر تصویر افقی افقیه‌ها نیز عمود می‌شود . به دلیل مشابه ، تصویر قائم Δ بر اثر قائم صفحه و بر تصویر قائم جبهه‌های آن ، عمود می‌شود .

تمرین ۱ - از نقطه مفروضی خطی بر صفحه مفروضی عمود کنید و موقع عمود را بدست آورید .

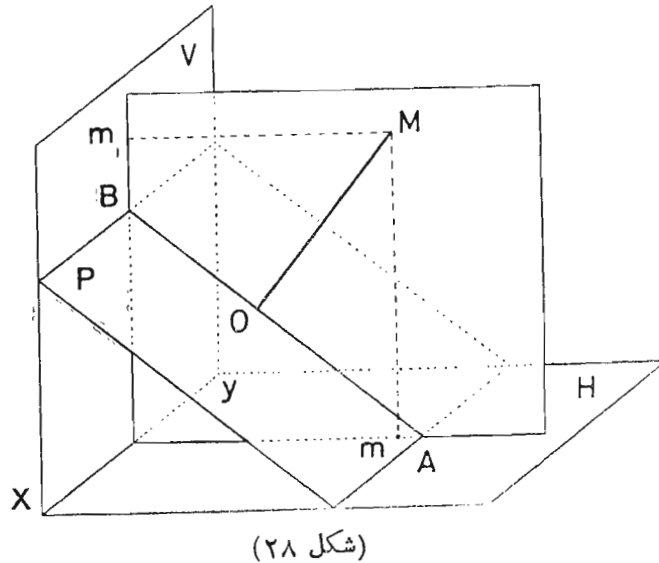
تمرین ۲ - خط عمود بر صفحه قائم، چگونه خطی است ؟ بر صفحه منتصب ؟ بر صفحه افقی ؟ بر صفحه جیبی ؟ بر هر يك از صفحات چهارگانه خطی عمود کرده و موقع عمود را بدست آورید .

تمرین ۳ - از نقطه مفروض، خطی بر صفحه نیمرخ عمود کرده موقع عمود را بدست آورید .

۱۹- حالت خاص - از نقطه مفروض، خطی بر صفحه مواجه عمود کنید .

چون خط عمود بر صفحه مواجه نیمرخ است، باید يك نقطه دیگر آن را مشخص ساخت .

هرگاه بر M صفحه نیمرخي مرور دهیم تا صفحه مواجه P را بر



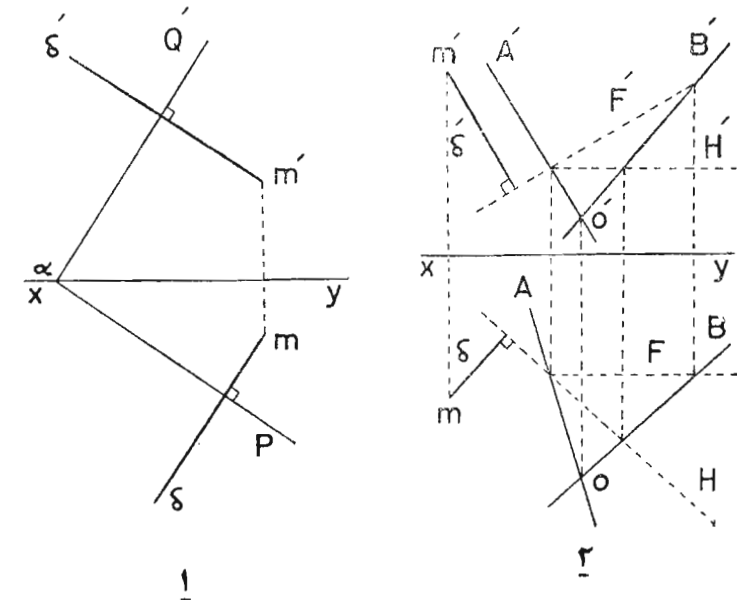
(شکل ۲۸)

فصل مشترك AB قطع کند (شکل ۲۸) و در همان صفحه نیمرخ، خط

۱۷ - بعکس هرگاه صفحه ای بر خطی عمود باشد، اثر افقی و تصویر افقی اقیهه های آن، عمود است بر تصویر افقی خط و اثر قائم و تصویر قائم جیبیه های آن، عمود است بر تصویر قائم خط .

۱۸- مسئله - از نقطه M خطی بر صفحه P عمود کنید .
الف - هرگاه صفحه با آثارش معین شده باشد، از m خط δ را بر αP و از m' خط δ' را بر $\alpha Q'$ عمود می کنیم (شکل ۲۷ - ۱) ؛ $\delta\delta'$ عمود مطلوب است .

ب - اگر صفحه به وسیله دو خط متقاطع AA' و BB' نمایش داده شده باشد (شکل ۲۷ - ۲)، نخست اقیهه ای مانند HH' و جیبیه ای مانند FF' در صفحه رسم می کنیم، آنگاه از m و m' ، تصاویر افقی وقائم نقطه M ، عمودهای δ و δ' را بترتیب بر H و F' رسم می کنیم .



(ش ۲۷)

ملخص - صفحہ مواجہ PQ' و نقطہ mm' مفروضند (شکل ۲۹)؛

۰_۱ تسطیح موقع عمود است؛ آنرا در 'oo' ترفیع می‌کنیم؛ خط 'mom'o' عمود مطلوب است .

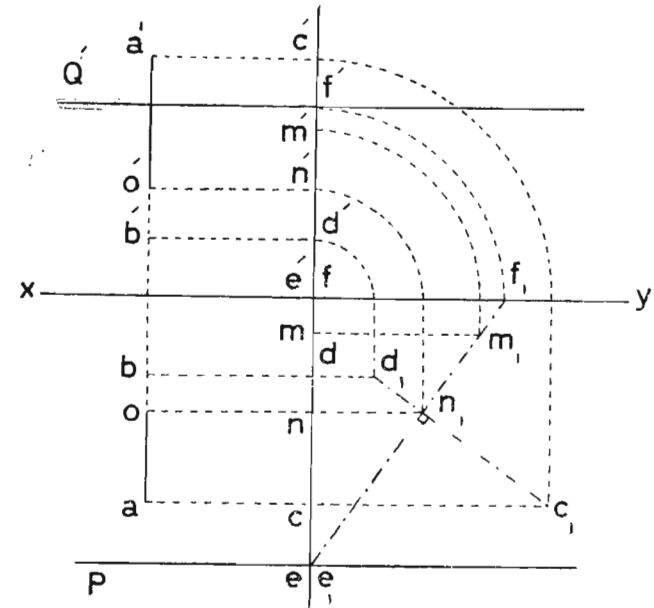
تصویر افقی اقلیه‌های صفحه (و اثر افقی صفحه) بر Δ و تصویر قائم جبهه‌های صفحه (و اثر قائم صفحه) بر Δ' عمود خواهند بود ؛ پس ممکن است از mm' (شکل ۳۰) اقلیه HH' را طوری رسم کنیم که تصویر اقلیش بر Δ عمود باشد و نیز جبهه FF' را طوری بکشیم که تصویر قائمش بر Δ' عمود رسم شود ؛ صفحه $FHF'H'$ صفحه مطلوب است . ولی راه سهلتر این است که با رسم يك افقیه (یا جبهه) آثار

تمرین ۲ - از نقطه 'aa' يك صفحه بر خطوط زیر عمود كنید و موقع عمود را بدست آورید: الف - افقی . ب - جبهی . ج - قائم . د - منتصب . ه - مواجہ .

مسلم است که صفحه مطلوب، مواجه خواهد بود .

بر mm' صفحه نیمرخ می‌گذرانیم و از aa' و bb' خطوط مواجی رسم می‌کنیم تا آن را در cc' و dd' قطع کنند؛ صفحه‌ای که بر mm' بگذرد و بر نیمرخ $cde'd'$ عمود باشد، بر $aba'b'$ هم عمود خواهد بود؛ حال صفحه نیمرخ را تسطیح می‌کنیم و از m_1 ، تسطیح

mm' ، عمودی بر cd ، تسطیح $cdc'd'$ ، فرود می آوریم؛ این خط تسطیح نیمرخ از صفحه مواجه مطلوب است؛ e و f تسطیح آثار آن



(ش ۳۱)

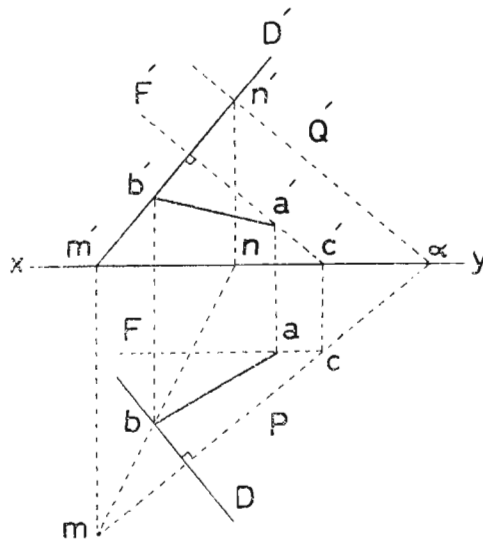
را یافته ترفیعیان می کنیم و آثار افقی وقائم صفحه مطلوب، P و Q' ، را می کشیم.

تمرین ۱ - الف - بر نقطه aa' صفحه ای عمود بر نیمساز فرجه اول و موازی با خط زمین مرور دهید. با مطالعه آثار این صفحه، خاصیتی برای آثار صفحات موازی با نیمساز فرجه دوم نتیجه بگیرید.

ب - از نقطه aa' نیمرخ عمود بر نیمساز فرجه اول رسم کنید؛ آنگاه بر این نیمرخ صفحه ای عمود کرده آثار آن را بدست آورید. از مطالعه آثار این صفحه، خاصیتی برای آثار صفحات موازی با نیمساز فرجه اول نتیجه بگیرید.

تمرین ۲ - دو نقطه A (۲ و ۳ و ۵) و B (۴ و ۱ و ۴) داده شده اند؛ مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاطی از فضا که از A و B به يك فاصله باشند.

۲۲ - مسئله - از نقطه aa' خطی بر خط DD' عمود کنید. مکان هندسی خطوطی که از يك نقطه بر يك خط عمود شوند، صفحه ای است که بر آن نقطه بگذرد و بر آن خط عمود باشد.



ش (۳۲)

پس، از aa' صفحه ای بر DD' عمود می کنیم و محل تلاقی خط DD' و صفحه مذکور را بدست می آوریم؛ خط $aba'b'$ خط مطلوب است (شکل ۳۲).

تمرین ۱ - خط AA' و تصویر افقی خط B داده شده اند؛ تصویر قائم B را بدست آورید قسمی که AA' و BB' متقاطع و عمود باشند.

تمرین ۲ - نقاط aa' و bb' و c تصویر افقی نقطه C داده شده است؛ c' را بدست آورید به فرض آنکه A و B و C سه رأس يك مستطیل باشند. مستطیل را رسم کنید.

تمرین ۳ - دو نقطه M و N و خط Δ داده شده اند؛ M و N دورأس مجاور مستطیلی هستند که يك رأس بر روی خط Δ است؛ مستطیل را بسازید.

۴ = عمود مشترك دو خط

۲۳- تعریف - عمود مشترك دو خط متناظر خطی است که هر دو را قطع کند و بر هر دو عمود باشد .

۲۴- مسئله - عمود مشترك دو خط متناظر Δ و D را رسم کنید .

راه اول -

دو صفحه اختیاری

بر D و Δ عمود

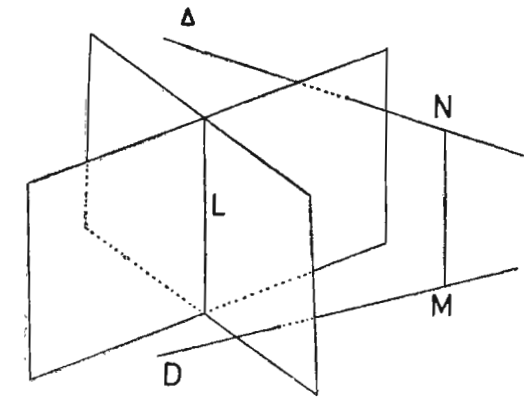
می کنیم (شکل ۳۳)

و خط L فصل مشترك

آنها را بدست می-

آوریم ؛ آنگاه

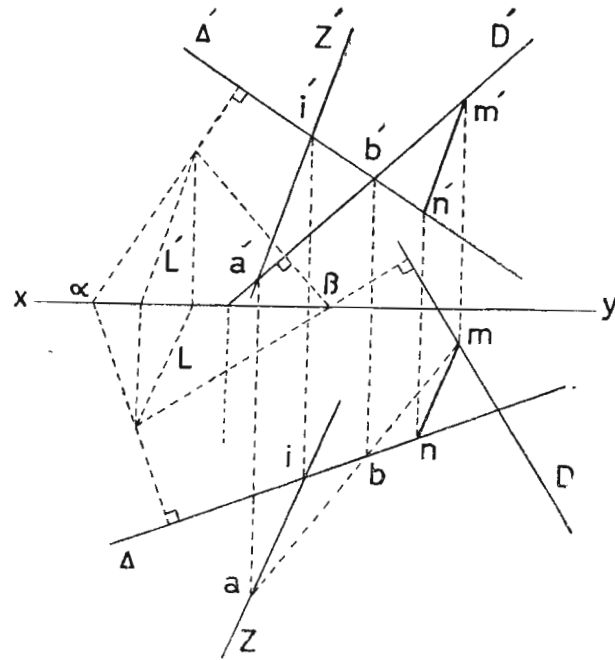
خطی مانند MN



(ش ۳۳)

به موازات L رسم می کنیم که Δ و D را قطع کند .

ملخص - دو خط DD' و $\Delta\Delta'$ مفروضند (شکل ۳۴) ؛ بر خط زمین دو نقطه α و β اختیار کرده از آنها بترتیب دو صفحه بر $\Delta\Delta'$ و DD' عمود می کنیم و فصل مشتركشان LL' را بدست می آوریم ؛ این خط، موازی با عمود مشترك دو خط است؛ حال نقطه ای مانند ii' بر $\Delta\Delta'$ اختیار کرده از ii' خط zz' را موازی با LL' می کشیم و به کمک صفحه منتصبی که بر DD' می گذرانیم فصل مشترك صفحه $\Delta\Delta'$ را با خط DD' بدست آورده mm' می نامیم؛ از خطی موازی با LL' رسم می کنیم تا $\Delta\Delta'$ را در nn' قطع کند ؛ $mnm'n'$ عمود مشترك مطلوب است .



(ش ۳۴)

راه دوم - از نقطه A واقع بر D خط R را موازی با Δ رسم می کنیم؛ صفحه ای که بر D و R می گذرد، با Δ موازی است؛ از نقطه ای مانند B از خط Δ عمود L را بر صفحه مذکور فرود آورده C موقع آن را بدست می آوریم؛ از C

خط T را موازی با Δ

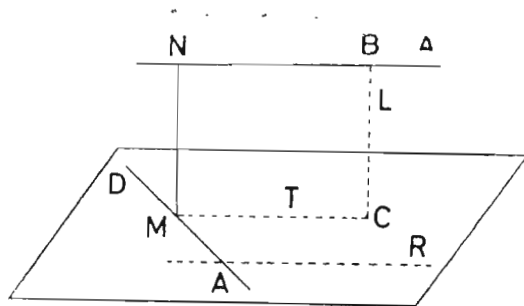
می کشیم تا D را در M

قطع کند ؛ MN را؛

موازی با L رسم می کنیم؛

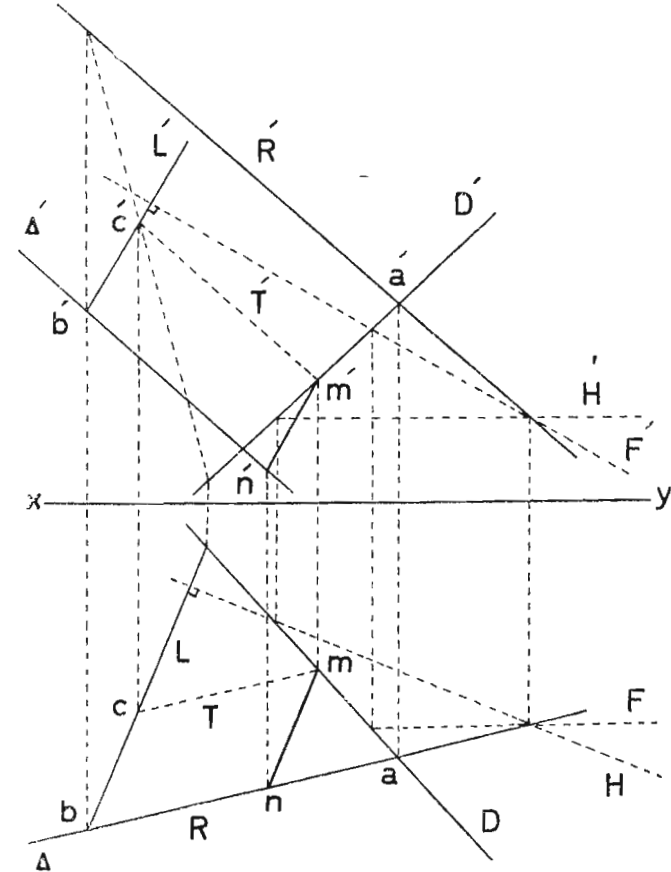
MN عمود مشترك مطلوب

است (شکل ۳۵) .



(ش ۳۵)

ملخص - دو خط DD' و $\Delta\Delta'$ داده شده اند (شکل ۳۶)؛ بر DD' نقطه ای مانند aa' اختیار کرده از آن، خط RR' را موازی با $\Delta\Delta'$ می کشیم



(ش ۳۶)

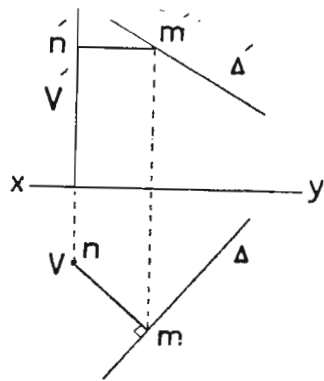
در شکل، نقطه aa' طوری اختیار شده است که تصاویر افقی R و Δ بر هم منطبق شوند؛ افقیه HH' و جبهیه FF' از صفحه مار بر DD' و RR' را رسم کرده از نقطه bb' که بر $\Delta\Delta'$ بطور اختیاری می گیریم، عمود LL' را بر صفحه مذکور رسم می کنیم و به کمک صفحه قائمی که

بر LL' می گذرانیم (در شکل، از رسم اثرا قائم صفحه کمکی که مورد استفاده واقع نمی شود، صرف نظر شده است)، نقطه تقاطع LL' و صفحه $DRD'R'$ را تعیین می کنیم؛ از خط cc' خط TT' را موازی با $\Delta\Delta'$ می کشیم تا DD' را در mm' قطع کند؛ $mnmm'n'$ را موازی با LL' رسم می کنیم تا $\Delta\Delta'$ را در nn' تلاقی کند؛ $mnmm'n'$ عمود مشترک مطلوب است.

۲۵ - حالت های خاص :

I - یکی از دو خط مفروض، قائم (یا منتصب) است .

مثال - اگر بخواهیم عمود مشترک خط قائم VV' و خط غیر مشخص $\Delta\Delta'$ را رسم کنیم (شکل ۳۷)، به این نکات توجه می کنیم :



(ش ۳۷)

الف - عمود مشترک مطلوب، بر خط قائم VV' عمود است، پس خطی است افقی .

ب - خط افقی مذکور، با $\Delta\Delta'$ زاویه قائمه ای می سازد که يك ضلعش (یعنی همان افقیه) با صفحه تصویر موازی است، پس تصویر افقی افقیه نامبرده عمود می شود بر Δ .

ج - تصویر افقی عمود مشترک، بر V می گذرد.

تصویر افقی عمود مشترک، Δ را در m قطع می کند؛ m' را بدست می آوریم و تصویر قائم عمود مشترک را به موازات خط زمین می کشیم.

قطعه $mn'm'n'$ در تصویر افقی به اندازه حقیقی تصویر شده است.

II - هر دو خط مفروض با یکی از صفحات تصویر، مثلاً با صفحه قائم، موازیند.

مثال - برای رسم کردن عمود

مشترك دو خط جبهی (شکل ۳۸)،

به این نکات توجه می‌کنیم:

الف - صفحه‌ای که بر خط جبهی

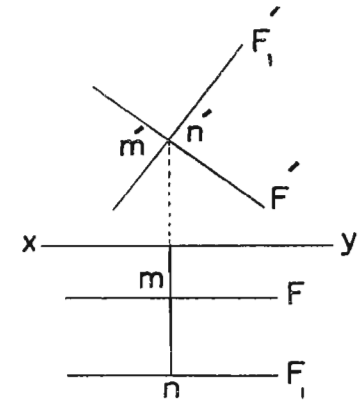
FF' به موازات جبهی $F_1F'_1$ مرور

کند، جبهی است.

ب - پس عمود مشترك دو خط،

که بر آن صفحه عمود است، منتصب

است.



(ش ۳۸)

ج - تصویر قائم منتصب مذکور، نقطه تلاقی F' و F'_1 است.

عمود مشترك مطلوب، در تصویر افقی به مقدار حقیقی تصویر

می‌شود.

تمرین ۱ - عمود مشترك دو خط D و Δ را در حالت‌های زیر رسم

کنید: الف - D افقیه و Δ جبهی، ب - D قائم و Δ منتصب، ج - هر دو

نیمرخ، د - هر دو مواجه، ه - D نیمرخ و Δ مواجه.

تمرین ۲ - قطعه خط $aba'b'$ عمود مشترك دو خط متنافر است که

تساویر افقیشان در دست هستند؛ تساویر قائمشان را بدست آورید.

تمرین ۳ - عمود مشترك دو خط متنافر که یکی افقیه و دیگری جبهی

است داده شده است؛ آن خطوط را رسم کنید.

تمرین ۴ - صفحه‌ای به يك فاصله از دو خط متنافر D و Δ مرور

دهید.

۲۶- تعریف - طول عمود مشترك دو خط متنافر را فاصله دو خط از یکدیگر می‌گویند.

خلاصه مطالب مهم:

۱ - شرط متوازی بودن دو صفحه آن است که دو خط متقاطع یکی با

دو خط متقاطع دیگری موازی باشند. در صفحات متوازی، آثار همنام باهم موازیند.

۲ - برای تعیین فصل مشترك دو صفحه، از دو صفحه کمکی استفاده

می‌کنیم. صفحات کمکی غالباً صفحات افقی و قائم تصویر هستند و اگر استفاده

از آنها ممکن نباشد، عموماً صفحات افقی یا جبهی یا قائم یا منتصب بعنوان

کمکی اختیار می‌شوند.

۳ - برای تعیین فصل مشترك خط و صفحه، بر خط يك صفحه کمکی

می‌گذرانیم تا صفحه مفروض را قطع کند؛ هر جا که فصل مشترك دو صفحه خط

مفروض را قطع کند، نقطه مطلوب است.

۴ - اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، تصویر افقی عمود است بر

اثر افقی و تصویر افقی افقیه‌های صفحه و تصویر قائمش عمود است بر اثر قائم

و بر تصویر قائم جبهی‌های صفحه.

۵ - خط عمود بر صفحه مواجه نیمرخ است و برای رسم آن باید

صفحه نیمرخ را رسم کرد و فصل مشترك آن را با صفحه مواجه بدست آورد؛

نیمرخ عمود بر این فصل مشترك، عمود مطلوب است.

تمرین

۱- آثار قائم دو صفحه، متوازی و معلومند و يك نقطه از فصل مشترك دو

صفحه هم داده شده است؛ آثار افقی آن دو را بدست آورید.

۲- فصل مشترك دو صفحه یکی از خطوط زیر است؛ تحقیق کنید که

آثار آنها چه وضعی دارند.

الف- نیمرخ موازی با نیمساز فرجه اول. ب- نیمرخ موازی با نیمساز

فرجه دوم . ج - خطی غیر مشخص واقع در نیمساز فرجه اول. د - خط غیر مشخصی واقع در نیمساز فرجه دوم .

۳- صفحه PaQ' و خط غیر مشخص $\Delta\Delta'$ و خط قائم VV' داده شده اند؛ مطلوب است رسم خطی به موازات صفحه مفروض که بر دو خط مذکور متکی باشد و تصویر افقیش بر نقطه معین می گذرد .

۴- خطی چنان رسم کنید که تصویر افقیش بر نقطه معینی بگذرد و با دو صفحه مفروض موازی باشد و خط مفروضی را هم قطع کند .

۵ - خطی رسم کنید که سه خط متناظر را قطع کند . در تعداد جوابها دقت کنید .

۶ - خطی رسم کنید که سه خط متناظر را قطع کند و به وسیله نقاط تقاطع، به دو جزء تقسیم شود که بر نسبت m و n باشند .

۷- تصاویر افقی اقمیه هایی که بر دو خط جبهی متناظر متکی باشند، در يك نقطه متقارند .

۸- ثابت کنید که هرگاه تصاویر افقی دو خط متناظر متوازی باشند ، همه اقمیه هایی که بر آن دو خط متکی شوند، با خط قائم ثابتی تلاقی می کنند. ۹- از نقطه واقع بر خطی ، خطی بر آن عمود کنید که خط مفروض دیگری را قطع کند .

۱۰- صفحه P و خط Δ داده شده اند ؛ خطی عمود بر Δ رسم کنید که آن را قطع کند و در صفحه P واقع باشد .

۱۱- خطی موازی با نیمرخ مفروض و متکی بر دو خط غیر مشخص رسم کنید .

۱۲- خطی موازی با دو صفحه مفروض و متکی بر دو خط مفروض رسم کنید .

۱۳- سه صفحه و نقطه ای خارج آنها داده شده اند ؛ بر نقطه، خطی موازی با یکی از آن صفحات مرور دهید که دو صفحه دیگر را قطع کند و آن نقطه وسط قطعه محصور بین آن صفحات باشد .

۱۴- بر دو نقطه A و B صفحه ای بگذرانید که از دو نقطه C و D

به يك فاصله باشد .

۱۵- بر نقطه A صفحه ای بگذرانید که از سه نقطه B و C و D به يك فاصله باشد .

۱۶- صفحه ای به موازات خط مفروض Δ رسم کنید که از سه نقطه A و B و C به يك فاصله باشد .

۱۷- صفحه ای چنان مرور دهید که از چهار نقطه مفروض به يك فاصله باشد .

۱۸- بر صفحه مفروض نقطه ای تعیین کنید که از سه نقطه مفروض به يك فاصله باشد .

۱۹- مرکز کره ای را که بر چهار نقطه مفروض می گذرد، بدست آورید. ۲۰- بر سه نقطه مفروض سه صفحه متوازی و متساوی الفاصله مرور دهید که یکی از آنها بر نقطه معینی بگذرد .

۲۱- بر دو نقطه W و K خط، سه صفحه متوازی و متساوی الفاصله بگذرانید. ۲۲- ثابت کنید که اگر آثار صفحه ای نسبت به xy قرینه یکدیگر باشند ، آن صفحه عمود بر نیمساز فرجه اول است .

۲۳- ثابت کنید که اگر آثار صفحه ای بر يك امتداد باشند ، صفحه عمود بر نیمساز فرجه دوم است .

۲۴- تصویر افقی لوزی و تصویر قائم يك قطر آن داده شده است ؛ ملخص لوزی را تکمیل کنید .

۲۵- $aba'b'$ قاعده يك مثلث متساوی الساقین و c' تصویر قائم رأس آن داده شده اند ؛ مثلث را رسم کنید .

۲۶- صفحه ای چنان رسم کنید که تصاویر چهار نقطه A و B و C و D بر روی آن، رئوس يك متوازی الاضلاع باشند .

۲۷- از کنج سه قائمه ای ملخص رأس و ملخص يك یال و تصویر افقی يك یال دیگر داده شده اند ؛ ملخص کنج را بسازید .

۲۸- چهار خط متقارب چهار یال کنجی را تشکیل می دهند ؛ بر نقطه مفروض M صفحه ای چنان مرور دهید که از تقاطعش با وجوه کنج، يك متوازی-

الاضلاع بوجود آید .

۲۹- بر نقطه مفروض M خطی چنان مرور دهید که خط مفروضی را قطع کند و بر خط مفروض دیگری عمود باشد .

۳۰- خط قائمی به بعد e رسم کنید که فاصله اش از خط مفروضی مساوی l باشد (یعنی طول عمود مشترکشان l باشد) .

۳۱- يك خط قائم و تصویر قائم خط غیر مشخص D و يك نقطه از تصویر افقی D و فاصله خط D از خط قائم مذکور در دست است؛ تصویر افقی D را رسم کنید .

۳۲- در صفحه مفروض PaQ' بر نقطه مفروض M خطی مرور دهید که فاصله اش از خط قائم مفروضی l باشد .

۳۳- از يك نقطه واقع در نیمساز فرجه دوم، صفحه ای بر خطی واقع در همان صفحه عمود کنید .

۳۴- فاصله حقیقی بین دو صفحه متوازی را بدست آورید .

۳۵- فاصله حقیقی يك نقطه واقع بر خط زمین را از خط مفروضی بدست آورید .

۳۶- بر روی خط نیمرخ نقطه ای پیدا کنید که از صفحه PaQ' به فاصله l باشد .

۳۷- صفحه ای به موازات صفحه دیگر چنان مرور دهید که جزئی از خط مفروض که بین آن دو صفحه می ماند به طول l باشد .

۳۸- دو صفحه به وسیله آثارشان داده شده اند ؛ تحقیق کنید بر هم عمودند یا نه .

مسائل رقوم امتحانات نهایی

۱- محور اقصر کاغذ، افقیه رقوم صفر صفحه P است که اساس آن $۱/۵$ اختیار شده و ترقی رقوم از پایین به بالاست (مقیاس $۱/۱$ و واحد برابر يك

سانتیمتر است) .

۱- نقطه o_5 را در صفحه روی محور اطول کاغذ بدست آورید .

۲- این نقطه را در حول افقیه رقوم صفر صفحه P تسطیح کنید .

۳- O_1 یعنی تسطیح نقطه را مرکز متوازی الاضلاع اختیار کنید که طول قطر A_1C_1 از آن برابر با ۱۰ بوده و رقوم رؤوس A_1 و C_1 بعد از ترفیع، بترتیب برابر ۷ و ۳ گردد و نقطه A_1 طرف چپ محور اطول کاغذ باشد ؛ این قطر را رسم کنید .

۴- فاصله حقیقی ضلع D_1C_1 از مرکز O_1 برابر $۱/۵$ است و رقوم رأس B_1 بعد از ترفیع، برابر ۴ می شود ؛ دورأس B_1 و D_1 را بدست آورید .
۵- این متوازی الاضلاع را قاعده يك متوازی السطوح قائمی اختیار کنید ؛ به فرض آنکه رقوم رأس e متعلق به یال ae از آن برابر ۱۷ شود، چهار رأس دیگر متوازی السطوح و تصویر تمام یالهای آن را رسم کنید .
۶- خطوط مرئی و مخفی را از یکدیگر تمیز دهید .

(خرداد ۱۳۳۷ تهران)

۲- شیب صفحه ای $\frac{1}{2}$ است و افقیه رقوم ۵ صفحه وسط کاغذ می باشد؛ کنار ورقه، خط بزرگترین شیب صفحه را رسم کرده از پایین به بالا مدرج کنید.
نقطه a روی افقیه رقوم ۴ و طرف راست آن، نقطه b روی افقیه رقوم ۵ بطوری که شیب خط AB مساوی $\frac{1}{6}$ باشد، قرار گرفته اند؛ مثلث ABC روی صفحه است؛ زاویه B در فضا قائمه و نقطه C به ارتفاع ۷ می باشد؛ تصویر مثلث را بدست آورید. ثانیاً از نقطه A خطی بر صفحه مثلث عمود کرده آن را تا نقطه D به ارتفاع صفر مدرج کنید. تصویر هرم $ABCD$ را رسم کنید.
(واحد سانتیمتر) .

(متفرقه خرداد ۱۳۳۷)

۳- واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{1}$ است .

۱- مقیاس شیب صفحه P را طرف چپ کنار اطول کاغذ و به فاصله

يك سانتیمتر از آن با اساس يك رسم کنید بقسمی که افقیه صفر صفحه بر محور اقصر کاغذ منطبق بوده و ترقی رقوم از پایین به بالا باشد .

۲- در صفحه P نقطه a_p را طوری اختیار کنید که فاصله آن با مقیاس شیب صفحه برابر ۹ شود .

۳- در صفحه P نقطه b_p را طرف چپ a_p بطریقی تعیین کنید که طول حقیقی AB برابر ۵ شود .

۴- در صفحه P نقطه c_p را طرف راست b_p قسمی معین کنید که شیب خط $b_p c_p$ برابر $\frac{2}{3}$ شود .

۵- با دو ضلع $a_p b_p$ و $b_p c_p$ متوازی الاضلاعی رسم کنید .

۶- نقطه s_p را طوری بدست آورید که خط $s_p c_p$ بر صفحه P عمود باشد .

۷- نقطه s_p رأس هرمی است که قاعده آن متوازی الاضلاع $a_p b_p c_p d_p$ می باشد؛ یالهای این هرم را رسم کرده خطوط مرئی و مخفی را از یکدیگر تمیز دهید .

(شهریور ۱۳۳۷ تهران)

۴- کادر تقریباً 20×25 ؛ گوشه چپ و پایین کاغذ را به گوشه راست و بالای آن وصل کنید؛ این خط D است که از پایین به بالا مدرج شده اساس آن ۲ سانتیمتر و روی آن نقطه a_p وسط کاغذ می باشد؛ از این خط صفحه P می گذرد که با صفحه افق زاویه 45° می سازد (از دو جواب، آن را انتخاب کنید که بزرگترین شیب تقریباً در امتداد محور طول کاغذ باشد)؛ مثلث ABC متساوی الاضلاع روی این صفحه است؛ a_p و b_p روی خط D و نقطه C ارتفاعش از A بیشتر است؛ این مثلث، قاعده چهاروجهی منتظمی است که رأس S آن، زیر صفحه P قرار دارد؛ مطلوب است ملخص هرم و مقطع آن با صفحه افقی ۵ .

(مترقه شهریور ۱۳۳۷)

۵- واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{2}$ و محل تلاقی دو قطر کاغذ، مرکز آن است .

۱- مقیاس شیب صفحه P را که شیبش $\frac{1}{2}$ است، در کنار چپ کاغذ به موازات محور طول آن چنان رسم کنید که افقیه رقوم ۲ صفحه از مرکز کاغذ بگذرد و ترقی رقوم آن از پایین به بالا باشد؛ در این صفحه نقطه o_p را روی محور طول کاغذ اختیار کنید .

۲- o_p مرکز لوزی ABCD واقع در صفحه P می باشد که قطر BD از آن در تسطیح با اثر صفحه زاویه 45° می سازد و آن را در چپ محور طول قطع می کند وشاع دایره محاطی $2/5$ بوده و زاویه A مساوی 60° است، رقوم B از رقوم D کمتر و رقوم C از رقوم A بیشتر است؛ ملخص لوزی را رسم کنید .

۳- صفحه Q را به فاصله $3/5$ به موازات صفحه P در پایین آن رسم کرده مقیاس شیب صفحه Q را در کنار راست کاغذ بکشید .

۴- از نقطه O خط Δ را به اساس ۳ چنان رسم کنید که تصویرش با امتداد افقیه های صفحه زاویه 60° بسازد و از پایین به بالا و از چپ به راست ممتد باشد و ترقی رقومش از بالا به پایین باشد .

۵- ملخص نقطه S محل برخورد صفحه Q را با خط Δ معین کنید .

۶- ملخص هرم SABCD را رسم کرده خطوط مرئی و مخفی آن را مشخص کنید .

(خرداد ۱۳۳۸ تهران)

۶- مطلوب است رسم چهار وجهی SABC به فرض آنکه :

۱- رأس S سه قائمه باشد .

۲- تصویر رأس S نقطه s_{10} بر مرکز کاغذ منطبق باشد .

۳- تصویر یال SA بر امتداد قطر اقصر کاغذ واقع است .

۴- دو صفحه ASC و BSC با صفحه افق بترتیب زاویه 69° و 48°

ساخته اند .

۵- قاعده ABC در صفحه افق تصویر قرار دارد .

۷- واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{4}$ و محل تلاقی دو قطر کاغذ (α) مرکز

آن است .

۱- مقیاس شیب صفحه P را که با صفحه مقایسه زاویه 30° می سازد ، در کنار چپ کاغذ به موازات محور طول آن چنان رسم کنید که اثر صفحه از α بگذرد و رقومش از پایین به بالا ترقی کند؛ در این صفحه نقطه o_p را طرف راست محور طول به فاصله ۳ از آن اختیار کنید .

۲- ملخص مثلث قائم الزاویه ABC (قائمه در A) را که در صفحه P واقع است ، با شرایط زیر رسم کنید : AB افقیه است $AC=3$ و o_p مرکز دایره محاطی خارجی مماس به ضلع AC و شعاع این دایره نیز ۲ است و B طرف چپ A قرار دارد و رقوم C از رقوم A بیشتر است .

۳- از α خط D را در صفحه P چنان رسم کنید که تصویرش با اثر صفحه زاویه 60° بسازد و از پایین به بالا به طرف چپ ممتد باشد .

۴- از خط D صفحه Q را به شیب يك مرور دهید (از دو جواب، آن را اختیار کنید که افقیه رقوم ۲ صفحه Q ، اثر صفحه P را طرف راست α قطع کند) .

۵- ملخص هرم SABC را با شرایط زیر رسم کنید : S در صفحه Q قرار دارد ، وجه SAB افقی است و SB برابر SA می باشد .

۶- خطوط مرئی و مخفی را مشخص کنید .

(شهریور ۱۳۳۸ تهران)

۸- واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{10}$ است .

دو نقطه a_{38} و b_{56} تصاویر دو نقطه A و B و $ab=42$ است .

۱- بر خط AB صفحه P را به شیب $\frac{1}{4}$ مرور دهید .

۲- در صفحه P روی AB مربع ABCD را بسازید .

۳- مربع مزبور، قاعده منشور قائمی است که ارتفاعش برابر است با ۶۰؛ این منشور را رسم کنید .

۴- مقطع این منشور را به وسیله دو صفحه افقی که موازی یکدیگر و به فاصله يك سانتیمتر از هم رسم شده اند ، پیدا کنید .

(متفرقه شهریور ۱۳۳۸)

۹- مسئله اول : واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{4}$ است . محورهای کاغذ را محورهای مختصات اختیار کنید .

۱- نقطه o_p را به طول ۳ و به عرض $2/5$ معین کنید و خطی رسم کنید که محور طولها را به طول ۳ - و محور عرضها را به عرض ۳ - قطع کند؛ روی این خط ، نقطه ای به طول ۱۰ - اختیار کنید ؛ از همین نقطه مقیاس شیب صفحه P را که با صفحه مقایسه زاویه 45° می سازد، رسم کنید بقسمی که اثر صفحه، خط مذکور بوده و رقومش از چپ به راست ترقی کند .

۲- از نقطه o_p خطی بر صفحه P عمود کرده و موقع عمود را معین کنید .

۳- اگر m_p موقع عمود باشد ، اندازه حقیقی $o_p m_p$ را معین کنید .

۴- از m_p خط Δ را در صفحه P رسم کنید بطوری که تصویر خط با محور طولها زاویه 60° بسازد و به طرف راست کاغذ بالا رود . این خط را مدرج کنید .

۵- ملخص مکعبی را رسم کنید که مرکزش نقطه o_p و قاعده اش در صفحه P و يك ضلع قاعده به موازات Δ باشد .

۶- خطوط مخفی و مرئی جسم را مشخص کنید .

مسئله دوم : دو خط $a_1 b_4$ و $c_4 d_5$ را بقسمی رسم کنید که ab موازی

cd بوده اولی به اساس يك ودومی به اساس دو باشد؛ عمود مشترك این دو خط را پیدا کنید .

(خرداد ۱۳۳۹ تهران)

۱۰- واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{2}$ است .

- ۱- پاره خط a_b را برابر $(ab=8)$ به موازات محور اقصا کاغذ طوری بگیرید که فاصله نقطه a از کنار راست کاغذ ۷ و فاصله آن از کنار تحتانی کاغذ ۸ و نقطه b طرف چپ a باشد .
- ۲- از نقطه b صفحه P را عمود بر خط a_b مرور داده و اثر آن صفحه را رسم کنید .

۳- نقطه b را در حول اثر صفحه P تسطیح کنید .

- ۴- بر خط a_b صفحه دیگر P' را طوری مرور دهید که با صفحه قائم مصور خط a_b زاویه 45° تشکیل داده و علاوه آثار دو صفحه P و P' همدیگر را روی کاغذ در يك نقطه c که تعیین خواهید کرد طرف بالای امتداد a_b تلاقی کنند .

۵- طولهای حقیقی اضلاع مثلث $a_b c$ را حساب کرده و از این رو ثابت کنید مثلث فضایی aBc در رأس B قائم الزاویه است .

- ۶- بر روی aBc مستطیل $aBcD$ را بنا کرده و ملخص آن را که متوازی الاضلاع $a_b c_d$ است رسم و رقوم نقطه d را مشخص کنید .

۷- بر روی مستطیل مزبور، مکعب مستطیلی را که طول حقیقی ارتفاع آن برابر قطر a_c قاعده بوده و چهار رأس دیگر آن تماماً دارای ارقام مثبت هستند، بنا کرده ملخص آن را رسم کنید .

- ۸- با فرض کدر بودن مکعب مستطیل، خطوط مرئی را از مخفی تمیز

بدهید .

(متفرقه خرداد ۱۳۳۹)

۱۱- واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{2}$ است .

قطر اقصا کاغذ اثر صفحه P است که شیبش $\frac{2}{3}$ می باشد و ترقی رقومش از پایین به بالاست؛ در این صفحه نقطه o واقع بر محور اطول مرکز شش ضلعی منتظمی است که قطر دایره محیطش ۸ بوده و یکی از اقطارش افقی است؛ ملخص آن را رسم کنید .

- ۲- این شش ضلعی قاعده هرم ناقص منتظمی است به ارتفاع ۱۱ که قاعده دیگرش در پایین صفحه P واقع است و قطر این قاعده ۴ است؛ ملخص جسم را تعیین کرده خطوط مرئی و مخفی آن را تعیین کنید .

(شهریور ۱۳۳۹ تهران)

۱۲- واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{2}$ است . پاره خط a_d را به طول

$ad=6$ روی محور اقصا کاغذ طوری بگیرید که نقاط a و d نسبت به محور اطول کاغذ قرینه یکدیگر بوده و نقطه a سمت چپ d باشد .

- ۱- شیب و اساس و طول حقیقی پاره خط a_d را معین کنید .
- ۲- بر پاره خط a_d دو صفحه با شیب واحد مرور داده و آثار این دو صفحه را رسم کنید .
- ۳- از نقطه d صفحه سوم عمود بر خط a_d مرور داده و اثر این صفحه را نیز رسم کنید .

۴- آثار سه صفحه نامبرده دوبرو همدیگر را در نقاط a و b و c قطع می کنند؛ مثلث $a_b c$ را مشخص کنید . (b بالای محور اقصا کاغذ و c زیر آن است) .

- ۵- مقدار حقیقی زاویه مسطحه فرجه حاصل از تقاطع دو صفحه $a_d c$ و $b_a d$ را به وسیله تسطیح معلوم کنید .

۶- مثلث $a_b c$ یکی از قواعد منشور مثلث القاعده مایلی است که

پاره خط $c_0 d_3$ یکی از یالهای جانبی آن است؛ ملخص این منشور را تکمیل کنید.

۷- با فرض کدر بودن منشور، خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید.

۸- حجم منشور فوق را دقیقاً حساب کنید.

(متفرقه شهریور ۱۳۳۹)

۱۳- واحد سانتیمتر، مقیاس $\frac{1}{2}$ و محورهای مختصات، محورهای کاغذ

می باشد.

مسئله اول - مقیاس شیب صفحه P را به اساس يك، کنار چپ کاغذ به موازات محور اطول رسم کنید؛ اثر صفحه از مرکز کاغذ می گذرد و ترقی رقوم به بالا است:

۱- در صفحه P نقطه a_1 به فاصله ۶ طرف راست مقیاس شیب و نقطه b_1 را طرف چپ a طوری اختیار کنید که $AB=3$ باشد.

۲- نقطه o_1 را در صفحه P طرف راست a قسمی اختیار کنید که $\widehat{AOB}=30^\circ$ باشد.

۳- ملخص متوازی الاضلاعی را رسم کنید که a_1 و b_1 دو رأس مجاور و o_1 محل تلاقی دو قطرش باشد.

۴- اگر $a_1 b_1 c_1 d_1$ متوازی الاضلاع مطلوب باشد، ملخص منشوری را رسم کنید که قاعده تحتانی آن این متوازی الاضلاع بوده و تصویر یالهای جانبی آن به موازات محور اقصر و طول حقیقی هر يك از آنها ۵ و اختلاف رقوم انتهای یالها ۳ باشد؛ خطوط مرئی و مخفی جسم را مشخص کنید. (قاعده دیگر، سمت راست $abcd$ است.)

مسئله دوم - نقاط a_1 و b_1 و c_1 که رقوم آنها بترتیب دو و يك و صفر است، سه رأس مثلثی می باشند. مقیاس شیب صفحه مثلث و ملخص محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث را معین کنید و نقطه ای روی صفحه مقایسه

بدست آورید که از سه ضلع مثلث به يك فاصله باشد.

(خرداد ۱۳۴۰ تهران)

۱۴- محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم کنید؛ محل تلاقی آنها مرکز

کاغذ، واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{2}$ است.

۱- دو نقطه s_0 و h_1 را روی محور اطول و زیر محور اقصر به این ترتیب انتخاب کنید: فاصله s تا مرکز کاغذ ۲ و $sh=4$.

۲- از نقطه s خط عمودی بر SH در نظر بگیرید که تصویر آن، محور اقصر را در فاصله ۲ چپ مرکز کاغذ تلاقی کند؛ روی ملخص مدرج این خط، نقطه a_1 را اختیار کنید.

۳- شیب صفحه $h_1 s_0 a_1$ را حساب کنید.

۴- SA یکی از یالهای هرم مثلث القاعده $SABC$ است بطوری که یال AB آن افقیه است که تصویر آن موازی محور اطول کاغذ و یال BC بر صفحه ASH عمود بوده و تصویر آن از h می گذرد، بالاخره تصویر یال SC موازی محور اقصر کاغذ است؛ تصاویر دو رأس B و C را تعیین و رقومهای آنها را حساب کنید.

۵- ملخص هرم را رسم و با فرض کدر بودن سطح آن، خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید.

۶- وسعت مثلث ASB را به وسیله تسطیح مشخص کنید.

۷- ملخص عمود مشترك دو خط متناظر و نامحدود AB و SC و همچنین کوتاهترین فاصله میان آنها را به وسیله تسطیح تعیین کنید.

(متفرقه خرداد ۱۳۴۰)

۱۵- (واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{2}$ است).

مسئله اول - مثلث ABC در صفحه P که شیب $\frac{1}{4}$ است واقع است.

a_p و b_p بترتیب به فاصله ۶ و ۴ از مقیاس شیب صفحه که با محور طول کاغذ موازی است و اثر صفحه از مرکز کاغذ می‌گذرد، قرار دارند.

میانۀ رأس A به درازای $2/5$ و رقوم رأس C برابر ۳ است و c سمت چپ a واقع است؛ ملخص مثلث را رسم کنید.

۲- ملخص منشور $ABCDEF$ را رسم کنید که یالهای جانبی آن نیز به شیب $1/4$ بوده و تصویرشان با محور اقصر کاغذ موازی می‌باشد و قاعدۀ DEF به فاصله $1/2$ از قاعدۀ ABC و در پایین آن واقع است (def را سمت راست abc اختیار کنید و اگر رأس c_p را در فرض اول نتوانسته‌اید پیدا کنید، آن را بدخواه انتخاب کرده و حل قسمت دوم را ادامه دهید).

۳- مرئی و مخفی یالهای جسم را مشخص کنید.

مسئله دوم - تصاویر خطوط بزرگترین شیب دو صفحه P و Q متوازیند؛ زاویۀ این دو صفحه را معین کنید.

(شهریور ۱۳۴۰ تهران)

۱۶- محورهای طول و اقصر کاغذ را رسم کنید؛ محل تلاقی آنها مرکز کاغذ، واحد سانتیمتر و مقیاس $1/4$ است.

۱- ملخص چهاروجهی $a_p.b_p.c_p.d_p$ را که در آن، مثلث $a_p.b_p.c_p$ روی صفحه مقایسه و متساوی‌الاضلاع است، به این ترتیب رسم کنید: a_p روی محور طول به فاصله ۵ بالای مرکز کاغذ، d_p نیز روی محور طول به فاصله ۳ زیر مرکز کاغذ تصویر شده، ضلع $b_p.c_p$ منطبق بر محور اقصر و b_p طرف چپ مرکز است.

۲- طول حقیقی یال $b_p.d_p$ را به وسیله محاسبه و طول حقیقی یال $a_p.d_p$ را به وسیله تسطیح ساده بدست آورید.

۳- به وسیله رسم مقیاس شیب، ثابت کنید زاویۀ هر يك از دو صفحه $a_p.b_p.d_p$ و $a_p.c_p.d_p$ با صفحه مقایسه ۴۵ درجه است.

۴- به وسیله تسطیح ثابت کنید که زاویۀ cDb مساوی ۶۰ درجه است.

۵- عمود مشترك دویال $a_p.d_p$ و $b_p.c_p$ را تعیین و طول حقیقی کوتاه‌ترین فاصله میان این دو خط را حساب کنید.

۶- دو وجه $a_p.b_p.d_p$ و $a_p.c_p.d_p$ از چهاروجهی نامبرده را قاعده قرار داده و روی آنها دو منشور مثلث القاعدۀ قائم در طرف خارج چهاروجهی بقسمی بنا کنید که طول حقیقی ارتفاع مربوط به هر يك از آنها $4\sqrt{2}$ باشد؛ ملخص شکلی را که به وسیله چهاروجهی قبلی و این دو منشور قائم بدست می‌آید، رسم و رقومهای رؤس جدید آن را تعیین و با فرض کدر بودن شکل نامبرده، خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید.

(متفرقه شهریور ۱۳۴۰)

۱۷- محور طول کاغذ را رسم کنید؛ واحد سانتیمتر و مقیاس $1/4$ است.

اثر h_p صفحه P را به موازات کنار تحتانی کاغذ و به فاصله ۸ از آن رسم کنید؛ این صفحه با صفحه مقایسه زاویۀ ۴۵ درجه تشکیل داده و ترقی رقومهای مقیاس شیب آن از پایین به بالاست.

۱- دو نقطه a_p و c_p را روی صفحه P طوری بگیرید که تصاویر آنها بر روی محور طول کاغذ قرار بگیرد.

۲- طول AC را حساب کنید.

۳- مربع $ABCD$ را بر روی صفحه P که AC یکی از اقطار آن است، در نظر گرفته تسطیح و سپس ملخص این مربع را رسم کنید؛ b سمت راست محور طول است.

۴- از مرکز این مربع، خطی عمود بر صفحه آن رسم کرده و نقطه e_p اثر این خط را بدست آورید.

۵- نقطه f قرینۀ e_p را نسبت به صفحه مربع پیدا کرده و رقوم آن را تعیین و ملخص شکل $EABCD$ را رسم کنید.

۶- بر اثر h_p مجدداً دو صفحه دیگر P' و P'' را چنان مرور دهید

که زوایای آنها با صفحه مقایسه بترتیب ۳۰ و ۶۰ درجه بوده و ترقی رقومهای مقیاس شیب آنها هردو نیز از پایین به بالا باشد؛ مقیاس شیب صفحه P' را به فاصله يك كنار راست و مقیاس شیب صفحه P'' را به فاصله يك كنار چپ كاغذ رسم کنید.

۷- هر يك از این دو صفحه P' و P'' چهار یال از شکل EABCDF را قطع می‌کند؛ ملخص و رقوم این ۸ نقطه تقاطع را تعیین و قسمتی از شکل نامبرده را که مابین این دو صفحه قرار دارد، نمایش داده و با فرض کدر بودن آن، خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید.

(متفرقه آبان ماه ۱۳۴۰)

۱۸- محورهای طول و اقصر كاغذ را رسم کنید؛ محل تلاقی آنها مرکز

كاغذ، واحد سانیتمتر و مقیاس $\frac{1}{4}$ است.

۱- نقطه a_1 را منطبق بر مرکز كاغذ انتخاب کرده و به همان مرکز و شعاع $\frac{1}{2}$ دایره‌ای رسم کنید که محور طول را زیر مرکز كاغذ در نقطه e_d تلاقی کند؛ محیط دایره نامبرده را شروع از نقطه e_d سه قسمت مساوی تقسیم کرده و نقاط تقسیم را از همین نقطه در جهت مثلثاتی مرتباً e_d و b_d و d_d بنامید.

۲- طول $AE = AB = AD$ را حساب کنید.

۳- به قاعده تسطیح، و یا محاسبه، ثابت کنید که $\widehat{BAD} = 90^\circ$ است.

۴- ثابت کنید که خط AE بر صفحه BAD عمود و کنج سه وجهی $(A - EBD)$ سه قائمه است.

۵- روی مثلث BAD مربع $ABCD$ را که BD یکی از اقطار آن است، بنا کرده و ملخص $a_1 b_d c d_d$ این مربع را رسم و رقوم نقطه c را تعیین کنید.

۶- مربع $ABCD$ را قاعده قرار داده و روی آن مکعبی بنا کنید بقسمی که AE یکی دیگر از یالهای آن باشد؛ ملخص آن را رسم و رقومهای

بقیه رؤوس آن را تعیین و چنانکه سطح این مکعب کدر باشد، خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید.

۷- بر وسط قطری از مکعب نامبرده که بالاترین رأس آن را به پایین‌ترین رأس وصل می‌کند، صفحه‌ای عمود بر همین قطر مرور داده و مقطع این صفحه را در مکعب رسم کنید.

۸- وسعت این مقطع را حساب کنید.

(متفرقه اردیبهشت ۱۳۴۱)

۱۹- محورهای طول و اقصر كاغذ را رسم کنید؛ واحد سانیتمتر و

مقیاس $\frac{1}{4}$ است.

۱- نقطه a_0 را منطبق بر مرکز كاغذ و نقطه s_v را روی محور طول در فاصله ۴ پایین مرکز كاغذ انتخاب کنید؛ به مرکز s و شعاع sa دایره‌ای رسم کرده محیط آن را از نقطه a_0 به شش قسمت مساوی تقسیم کرده و نقاط تقسیم را در جهت مثلثاتی مرتباً $a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0$ بنامید، سپس ملخص هرم منتظم مسدس القاعده $s_v a_0 b_0 c_0 d_0 e_0 f_0$ را رسم کنید.

۲- طول Sa را به وسیله تسطیح و یا محاسبه پیدا کنید.

۳- يك مقیاس شیب از صفحه $s_v b_0 c_0$ را رسم کرده و شیب این صفحه را معلوم کنید.

۴- فصل مشترك دو صفحه $s_v b_0 c_0$ و $s_v d_0 c_0$ را رسم و زاویه حقیقی این فصل مشترك را با خط بزرگترین شیب صفحه $s_v c_0 d_0$ به وسیله تسطیح پیدا کنید.

۵- عمود مشترك دو خط متناظر $s_v a_0$ و $c_0 e_0$ را رسم و فاصله حقیقی این دو خط متناظر را به وسیله تسطیح و محاسبه پیدا کنید.

۶- مثلث $s_v a_0 b_0$ را در حول اثر $a_0 b_0$ صفحه آن طرف خارج شکل در S_{ab} تسطیح کنید.

۷- اکنون فرض می‌کنیم مثلث S_{ab} يك وجه جانبی از هرم منتظم فوق

بر صفحه مقایسه قرار گرفته و بالعکس شش ضلعی منتظم $abcdef$ تسطیح قاعده آن در حول همان لولای a_0b_0 قبلی باشد؛ با فرض جدید، قاعده نامبرده و رقومهای چهار رأس دیگر آن را با $\frac{1}{10}$ تقریب تعیین و ملخص هرم را در وضع جدید رسم و چنانچه سطح آن کدر باشد، خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید.

(خرداد ۱۳۴۱ دبیرستانهای کشور)

۲۰- محوره‌های طول و اقصر کاغذ را رسم کنید؛ محل تلاقی آنها مرکز کاغذ، واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{10}$ است.

۱- اثر صفحه P بر محور اقصر کاغذ منطبق است؛ زاویه این صفحه با صفحه مقایسه 45° درجه و ترقی رقومهای مقیاس شیب آن از بالا به پایین کاغذ است؛ یک مقیاس شیب از این صفحه را در فاصله یک کنار چپ کاغذ رسم کرده نقطه a_0 را روی اثر صفحه در فاصله ۴ راست مرکز کاغذ انتخاب کنید.

۲- از نقطه a_0 در صفحه P پاره خط a_0b_0 را طوری رسم کنید که زاویه حقیقی آن با اثر صفحه منبسط 30° بوده و بعلاوه b سمت چپ محور طول کاغذ باشد.

۳- از نقطه a_0 مجدداً در صفحه P پاره خط دیگر a_0d_0 را بقسمی بگیرید که خط a_0b_0 بر خط a_0d_0 عمود باشد.

۴- ملخص مستطیل، $a_0b_0c_0d_0$ را که BD قطر آن است، رسم و رقوم C رأس چهارم آن را تعیین کنید.

۵- روی این مستطیل، متوازی‌السطوحی بنا کنید به این ترتیب که از رئوس آن، اقلیه‌هایی که تصاویر آنها موازی محور طول کاغذ باشد مرور داده و روی هر کدام از آنها شروع از رئوس مستطیل به سمت بالای کاغذ طول ۱۰ واحد جدا کرده و نقاط حاصل را متوالیاً به هم وصل کنید تا قاعده دیگر متوازی‌السطوح بدست آید؛ ملخص این متوازی‌السطوح را رسم و با کدر بودن سطح آن، خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید.

۶- صفحه دیگر P' را که اثر آن نیز بر محور اقصر کاغذ منطبق بوده و زاویه آن با صفحه مقایسه همان 45° درجه منتهی در خلاف جهت زاویه صفحه P با صفحه مقایسه باشد، در نظر می‌گیریم؛ یک مقیاس شیب از این صفحه P' را در فاصله یک کنار راست کاغذ رسم کنید.

۷- نقاط تلاقی صفحه اخیر P' را با چهار یال افقی متوازی‌السطوح مذکور تعیین کرده و آنها را بطور متوالی به یکدیگر وصل کنید تا یک چهارضلعی بدست آید.

(شهریور ۱۳۴۱ دبیرستانهای کشور)

۲۱- محوره‌های طول و اقصر کاغذ را رسم کنید؛ محل تلاقی آنها مرکز کاغذ، واحد سانتیمتر است و مقیاس $\frac{1}{10}$ است.

۱- پاره خط a_0b_0 را بقسمی که $ab = 6\sqrt{2}$ باشد، روی محور اقصر طوری بگیرید که b بر مرکز کاغذ منطبق بوده و a سمت چپ آن باشد.

۲- از نقطه b_0 نیم خطی چنان رسم کنید که تصویر آن با قسمت راست محور اقصر و در بالای آن زاویه 60° درجه تشکیل دهد؛ روی این نیم خط نقطه c_0 را طوری بگیرید که خط a_0b_0 بر c_0b_0 عمود باشد.

۳- اضلاع مثلث $a_0b_0c_0$ و شیب صفحه این مثلث را حساب کنید.

۴- بر ضلع a_0c_0 این مثلث، صفحه P را طوری مرور دهید که زاویه آن با صفحه مقایسه برابر زاویه مثلث نامبرده با صفحه مقایسه منتهی در خلاف جهت آن باشد؛ یک مقیاس شیب از این صفحه را با اختیار رسم کنید.

۵- از نقطه b_0 عمودی بر صفحه P فرود آورده پای عمود و رقوم آن را تا $\frac{1}{10}$ تقریب از روی شکل تعیین کنید.

۶- روی صفحه P نقطه s_0 را طوری بگیرید که $Sa = Sc$ باشد و ملخص هرم $SBac$ را رسم کنید.

۷- روی یالهای هرم نامبرده، نقاط به رقوم ۶ را به یکدیگر وصل کرده

و در نمایش نهایی، قسمتی از هرم را که مابین صفحه افقی به رقوم ۶ و صفحه مثلث aBc محصور است، نشان بدهید و چنانچه صفحه افقی مزبور حاکی ماورا و سطح هرم کدر باشد، خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید.

(متفرقه آبان ماه ۱۳۴۱)

۲۲- محور اطول کاغذ را رسم کنید؛ واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{4}$ است.

۱- پاره خط $a_0b_0 = 10$ را موازی کنار پایین کاغذ و به فاصله ۶ از آن، طوری رسم کنید که a به فاصله پنج طرف چپ محور اطول کاغذ و b به فاصله پنج طرف راست محور اطول کاغذ باشد؛ از نقطه b_0 پاره خط b_0c_0 را به شیب $\frac{3}{4}$ زیر a_0b_0 بکشی که زاویه حقیقی آن با a_0b_0 60° درجه باشد (یعنی $\widehat{abC} = 60^\circ$)؛ سپس نقطه d_0 را که تصویر آن قرینه c نسبت به محور اطول کاغذ است، در نظر گرفته ملخص چهارضلعی $a_0b_0c_0d_0$ را تکمیل و شیب صفحه آن را حساب کنید.

۲- این چهارضلعی را حول a_0b_0 تسطیح کرده و ثابت کنید که:

$$aD = DC = Cb = 5$$

۳- ملخص نقطه S را بقسمی تعیین کنید که $Sa = Sb$ بوده و SC افقیه و Sb بر bC عمود باشد.

۴- فصل مشترک دو صفحه $s_0c_0b_0$ و $s_0d_0a_0$ را رسم و عمود مشترک این فصل مشترک و خط a_0b_0 را که نسبت به هم متناظر هستند، تعیین کنید.

۵- مقدار حقیقی زاویه مسطحه فرجه‌ای از هرم $s_0a_0b_0c_0d_0$ را که یال آن فرجه پاره خط a_0b_0 است، رسم کنید.

۶- صفحه نیمساز فرجه نامبرده و همچنین صفحه‌ای را که بر یال a_0b_0 گذشته و بر صفحه $s_0c_0b_0$ عمود باشد، در نظر می‌گیریم، هر کدام از آنها چهار یال از هرم فوق‌الذکر را قطع می‌کند؛ ملخص نقاط تقاطع را تعیین و قسمتی از هرم را که مابین این دو صفحه قرار دارد، حذف کرده باقیمانده

را نمایش دهید؛ بالاخره قسمت حذف شده را در یک ملخص جداگانه نشان داده خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید؛ سطح هرم، کد فرض شده است.

(متفرقه اردیبهشت ۱۳۴۲)

۲۳- محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم کنید؛ محل تلاقی آنها مرکز کاغذ، واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{4}$ است.

۱- اثر صفحه P بر محور اقصر کاغذ منطبق بوده زاویه آن با صفحه مقایسه 30° درجه و ترقی رقومهای مقیاس شیب صفحه از بالا به پایین است؛ یک مقیاس شیب از این صفحه را با اختیار رسم کنید.

۲- نقاط a_1 و c_0 از صفحه P را که تصاویر آنها بر محور اطول کاغذ قرار دارد، انتخاب کرده و مربع $ABCD$ به قطر AC واقع بر صفحه P را در نظر گرفته ملخص آن را رسم و رقومهای دور a_1 و b را تعیین کنید؛ b سمت چپ و d سمت راست محور اطول است.

۳- پاره خط a_1s_1 را طوری رسم کنید که تصویر آن، محور اقصر کاغذ را در فاصله $\frac{1}{4}$ راست مرکز کاغذ قطع کرده و بعلاوه AS بر AC عمود باشد.

۴- ملخص هرم $SABCD$ را رسم و با فرض کدر بودن سطح آن، خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید.

۵- از رأس s_1 هرم فوق، عمودی بر قاعده فرود آورده و پای عمود و رقوم آن را تعیین کنید.

۶- مقدار حقیقی زاویه $b_1s_1d_1$ را به وسیله تسطیح نشان دهید.

(دبیرستانهای تهران خرداد ۱۳۴۲)

۲۴- محور اقصر کاغذ را رسم کنید؛ وسط آن مرکز کاغذ، واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{4}$ است.

۱- مثلث $a_b.c_o$ واقع بر صفحه مقایسه را به اضلاع $ab=8$ و $bc=8\sqrt{3}$ و $ac=8\sqrt{2}$ طوری رسم کنید که ضلع bc منطبق بر محور اقصر کاغذ بوده و b به فاصله $4\sqrt{3}$ سمت چپ مرکز کاغذ و c به فاصله $4\sqrt{3}$ سمت راست مرکز کاغذ و a بالای محورا اقصر کاغذ قرار بگیرد؛ همچنین نقطه s_p را که تصویر آن بر مرکز کاغذ منطبق است، اختیار کنید؛ هرم $Sabc$ را در نظرمی گیریم؛ ابتدا ثابت کنید که مثلث abc قائم الزاویه است.

۲- ثابت کنید طولهای $Sa=Sh=Sc=8$ است.

۳- با استفاده از تسطیح، ثابت کنید که زوایای $cSa = 90^\circ$ و $bSc = 120^\circ$ است.

۴- از نقطه b_o عمودی بر صفحه $s_p.a_b.c_o$ فرود آورده پای عمود و رقوم آن و فاصله حقیقی نقطه را تا صفحه تعیین کنید.

۵- بر یال $b_o.c_o$ هرم فوق، صفحه P را طوری مرور دهید که با صفحه مقایسه زاویه 45° درجه تشکیل داده و ترقی رقومهای مقیاس شیب آن، بالای کاغذ باشد؛ یک مقیاس شیب از این صفحه P را با اختیار رسم کنید.

۶- فرض می‌کنیم مثلث abc تسطیح مثلث $a_b.c_o$ از صفحه P حول لولای $b_o.c_o$ باشد؛ α و رقوم آن را تا $\frac{1}{10}$ تقریب تعیین کنید در صورتی که می‌دانیم این نقطه بالای صفحه مقایسه قرار گرفته است.

۷- در این ترفیع، رأس s_p هرم $s_p.a_b.c_o$ که صلب فرض می‌شود، وضع جدیدی پیدا می‌کند؛ تصویر و رقوم جدید آن را تا $\frac{1}{10}$ تقریب تعیین و ملخص هرم را در وضع جدید رسم کنید و چنانچه سطح آن کدر باشد، خطوط مرئی و مخفی این ملخص را از یکدیگر تمیز دهید.

(خرداد ۱۳۴۲ شهرستانها)

۲۵- محورهای طول و اقصر کاغذ را رسم کنید؛ واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{10}$ است.

۱- اثر صفحه P را به فاصله ۶ از کنار تحتانی کاغذ و به موازات آن رسم کنید؛ اساس این صفحه، یک و ترقی رقومهای مقیاس شیب آن از بالا به پایین است. ملخص دوزنقه متساوی الساقین $a_b.c_o.d_p$ را که بر صفحه P واقع است، به این ترتیب رسم کنید: قاعده $a_b.c_o=8$ بر اثر صفحه بطوری که a_o در فاصله ۴ راست محور طول کاغذ و b_o در فاصله ۴ چپ همان محور و طول قاعده دیگر $cd=4$ و c سمت چپ محور طول و d سمت راست آن واقع است.

۲- این دوزنقه را حول اثر صفحه P تسطیح می‌کنیم؛ ثابت کنید دوزنقه $abCD$ تسطیح شده قابل محیط شدن بر یک دایره است؛ شعاع دایره محاطی آن و طول ساق aD و همچنین طول تصویرش ad را حساب کنید.

۳- نقطه o_p از صفحه P را که تصویر آن بر محور طول قرار دارد، در نظرمی گیریم؛ ثابت کنید مقدار حقیقی زاویه $a_o.o_p.d_p=90^\circ$ درجه است.

۴- دوزنقه $a_b.c_o.d_p$ قاعده تحتانی منشور قائمی است واقع در بالای صفحه P بقسمی که طول حقیقی یال جانبی آن مساوی $2/5$ برابر قطر دایره محاطی دوزنقه $abCD$ است؛ رقومهای چهار رأس فوقانی این منشور قائم را تعیین و ملخص آن را رسم کنید.

۵- صفحه افقی به رقوم چهار، یالهای جانبی منشور فوق را قطع می‌کند؛ ملخص نقاط تقاطع را تعیین و بطور متوالی به هم وصل کنید تا یک چهارضلعی بدست آید.

۶- در ملخص نهایی و جدا گانه قسمتی از منشور فوق را که مابین صفحه دوزنقه $a_b.c_o.d_p$ و صفحه افقی به رقوم چهار قرار دارد، نشان داده و چنانچه سطح منشور، کدر و صفحه افقی نامبرده، حاکی ماورا باشد، خطوط مرئی را از مخفی تمیز دهید.

(شهریور ۱۳۴۲ دبیرستانها)

۲۶- محورهای طول و اقصر کاغذ را رسم کنید؛ محل تلاقی آنها مرکز

کاغذ، واحد، سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{10}$ می‌باشد.

۱- مربع $a_0b_0c_0d_0$ به ضلع e واقع بر صفحه مقایسه را طوری رسم کنید که مرکز آن، بر مرکز کاغذ منطبق و اضلاع آن، موازی محورهای کاغذ باشد؛ این مربع، قاعده تحتانی مکعبی است که قاعده فوقانی آن، مربع دیگر $e_1f_1g_1h_1$ است؛ e بر a منطبق و در ربع اول محورهای کاغذ بوده و تصاویر بقیه رئوس وجوه بالا و پایین، بترتیب در جهت مثلثاتی و مستقیم دوبرو بر همدیگر منطبقند.

۲- رأس e_1 از وجه فوقانی این مکعب را به مرکز وجه پایین وصل و همچنین قطر e_1c_0 مکعب را رسم می‌کنیم؛ زاویه حاده حقیقی مابین این دو خط را به وسیله تسطیح پیدا کنید و اگر این زاویه را θ بنامیم، ثابت کنید $\sin \theta = \frac{1}{3}$ است.

۳- عمود مشترك قطر b_0d_0 وجه پایین و قطر e_1c_0 مکعب را پیدا کنید.

۴- از رأس h_1 وجه فوقانی صفحه P را با شیب ۲ طوری مرور دهید که اثر آن از c_0 گذشته و محور اقصر کاغذ را طرف چپ مرکز تلاقی کند؛ يك مقیاس شیب از این صفحه P را باختیار رسم کنید.

۵- فرض می‌کنیم مربع $abcd$ تسطیح چهارضلعی رقوم‌دار $\alpha\beta c_0\Delta$ از صفحه P حول اثر این صفحه باشد؛ رقومهای سه رأس Δ و β و α را که مثبت فرض می‌شوند، تا $\frac{1}{10}$ تقریب تعیین و ملخص این چهارضلعی را رسم کنید.

۶- مکعب فوق را که صلب فرض می‌شود، پس از این ترفیع، مجدداً نمایش داده رقومهای سایر رئوس آن را تا $\frac{1}{10}$ تقریب تعیین و ملخص جدید آن را رسم کنید و با فرض کدر بودن سطح آن، خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید.

(شهریور ۱۳۴۲ متفرقه)

۲۷- محورهای طول و اقصر کاغذ را رسم کنید؛ محل تلاقی آنها مرکز کاغذ، واحد، سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{2}$ است.

۱- نقطه a_0 را منطبق بر مرکز کاغذ و نقطه c_0 را روی محور اقصر سمت راست مرکز طوری بگیرید که $ac = e$ باشد؛ مثلث acB واقع است بر صفحه قائمی که اثر آن، ac ، بر محور اقصر کاغذ می‌گذرد؛ در این مثلث، طول ضلع $aB = \sqrt{2}$ و زاویه $caB = 135^\circ$ درجه است؛ با استفاده از تسطیح، ملخص این مثلث را رسم و رقوم رأس B را تعیین کنید در صورتی که می‌دانیم این نقطه بالای صفحه مقایسه قرار دارد.

۲- طول ضلع Bc و شیب آن را حساب کنید.

۳- هرم فضایی $DBac$ را بقسمی بنا کنید که یالهای

$Da = DB = Dc$ بوده و زاویه $acD = 75^\circ$ باشد؛ با استفاده از تسطیح مجدد (یا به طریق دیگر)، ارتفاع این هرم را که از رأس D خارج می‌شود، رسم کنید.

۴- ملخص هرم فوق را رسم و رقوم رأس D را دقیقاً معین کنید؛ d بالای محور اقصر است.

۵- اگر وجه aBD از هرم فوق، يك قاعده از منشور مایلی فرض شود که پاره خط cD یال جانبی آن باشد، ملخص مرقوم این منشور را تکمیل و با فرض کدر بودن سطح آن، خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید؛ صفحه مقایسه، حاکی ماورا فرض می‌شود.

۶- تصویر و رقوم مرکز ثقل این منشور را پیدا کنید.

تبصره - مرکز ثقل منشور، وسط خط واصل بین محل تلاقی میانه‌های دو قاعده می‌باشد.

(متفرقه اردیبهشت ۱۳۴۳)

۲۸- محور طول و اقصر کاغذ را رسم کنید؛ محل تلاقی آنها مرکز کاغذ، واحد، سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{2}$ است؛

-۲۴۴-

۱- پاره خط a_1b را بقسمی اختیار کنید که $ab=6$ و موازی محور اقصر کاغذ a در فاصله ۳ زیر محور اقصر و در فاصله ۳ راست محور اطول و b سمت چپ a و رقوم آن از رقوم a کمتر و بعلاوه طول $AB=10$ باشد؛ رقوم b را تعیین کنید.

۲- از نقطه B افقیه BC را طوری مرور می‌دهیم که تصویر آن از مرکز کاغذ بگذرد و شیب خط AC برابر واحد و در تصویر، c بالای محور اقصر باشد؛ ملخص مثلث ABC را رسم و شیب صفحه آن را تعیین کنید.

۳- طولهای AC و BC را حساب کنید.

۴- مثلث $a_1b_1c_1$ را حول افقیه b_1c_1 تسطیح کنید.

۵- هرم $SABC$ را در نظر می‌گیریم که در آن، رأس S بالاتر از صفحه قاعده قرار دارد و یالهای $SA=SB=SC$ بوده و بعلاوه $\widehat{CSB}=90^\circ$ درجه باشد؛ از تسطیح فوق استفاده کرده با تسطیح مجدد (و یا به طریق دیگر)، ارتفاع این هرم را که از رأس S خارج می‌شود، ترسیم کنید.

۶- تصویر و رقوم رأس نامبرده را تا $\frac{1}{10}$ تقریب از روی شکل معلوم

کرده ملخص هرم را رسم و با فرض کدر بودن سطح آن، خطوط مرئی را از مخفی جدا کنید.

(دبیرستانها خرداد ۱۳۴۳)

-۲۴۹- واحد، سانتیمتر - مقیاس $\frac{1}{1}$.

۱- دو محور اطول و اقصر کاغذ را رسم کرده نقطه برخورد آنها را a بنامید؛ روی محور اقصر، دو نقطه b_1 و d_1 را در طرفین a بقسمی اختیار کنید که d_1 سمت راست a و به فاصله $6/4$ و b_1 سمت چپ a و به فاصله $3/6$ از آن قرار گیرد.

۲- از d_1 خطی به شیب $\frac{1}{4}$ و از b_1 خطی به شیب 1 چنان رسم کنید

-۲۴۵-

که یکدیگر را روی صفحه مقایسه قطع کنند و a_0 نقطه تقاطع آنها بالای محور اقصر باشد (فقط حل این قسمت را شرح دهید).

تبصره - اگر نتوانستید فرض دوم را حل کنید، a_0 را روی محور اطول و به فاصله $4/8$ از a و بالای آن اختیار کنید و حل بقیه مسئله را ادامه دهید.

۳- طولهای aB و aD را محاسبه کنید.

۴- مقدار حقیقی زاویه BaD را با تسطیح بیابید.

۵- ملخص متوازی الاضلاع $aBCD$ را رسم و رقوم C را بدست آورید.

۶- قسمتی از محور اطول را که از a_0 به سوی بالا ممتد است، تصویر

خطی عمود بر a_0d_1 فرض کرده و آن را تا نقطه e_1 مدرج کنید.

۷- ملخص متوازی السطوحی را که قاعده آن $aBCD$ و یکی از

یالهایش aE باشد، رسم و مرئی و مخفی آن را از هم تمیز دهید.

(دبیرستانها شهریور ۱۳۴۳)

-۳۰- واحد، سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{1}$ است - دو محور اطول و اقصر کاغذ

را رسم و محل تلاقی آنها را a بنامید؛ روی محور اطول، دو نقطه a_1 و b_1 را چنان اختیار کنید که a_1 زیر محور اقصر و به فاصله ۳ از a و b_1 بالای محور اقصر و به فاصله ۵ از a واقع باشد.

۱- اگر محور اقصر کاغذ را افقیه رقوم صفر فرض کنیم، عمود مشترک

a_1b_1 و این افقیه را بیابید.

توضیح - قسمتهای بعدی مسئله به این فرض ارتباطی ندارد و اگر

نتوانستید این فرض را حل کنید، مانعی برای ادامه مسئله نیست.

۲- در نقطه a_1 صفحه‌ای بر خط a_1b_1 عمود کرده یک مقیاس شیب از

این صفحه را در جای مناسب نقشه رسم کنید.

۳- روی محور اقصر و به فاصله ۴ از a و سمت چپ آن، نقطه α را

اختیار کنید؛ اگر $a\alpha$ تصویر خطی عمود بر a_1b_1 باشد، این خط را مدرج

کرده و روی آن، نقطه c_4 را بیابید.

۴- اگر a_5b_1 و a_5c_4 دو یال از يك كنج سه‌قائمه باشند، ملخص یال سوم را یافته و آن را تا نقطه d_4 مدرج کنید.

۵- اگر $c_4d_4a_5$ قاعده منشوری باشد که يك یال آن a_5b_1 است، ملخص منشور را کامل کرده و مرئی و مخفی آن را از هم تمیز دهید.
(متفرقه آبان ماه ۱۳۴۳)

۳۱- محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید؛ واحد، سانتیمتر و مقیاس.

۱- صفحه P به شیب يك مفروض است؛ مقیاس شیب آن را در طرف چپ کاغذ موازی محور اطول با ترقی رقوم از بالا به پایین طوری رسم کنید که اثر صفحه، منطبق بر محور اقصر کاغذ بوده و در این صفحه، نقطه a_0 را به فاصله ۳ سمت راست مرکز کاغذ اختیار نموده از این نقطه خط a_0c_4 را در صفحه P طوری رسم کنید که تصویرش با اثر صفحه زاویه ۳۰ درجه ساخته و نقطه c_4 در طرف چپ محور اطول واقع شود.

۲- طول حقیقی خط a_0c_4 را حساب کنید.

۳- a_0c_4 قطر مستطیل $ABCD$ واقع در صفحه P است که رقوم رأس B آن مساوی ۳ و b طرف راست محور اطول است؛ ملخص مستطیل را رسم کنید.

۴- از نقطه a_0 خطی به شیب $5/3$ رسم کنید که محور اطول را در نقطه s_{10} بالای مرکز کاغذ تلاقی نماید و به وسیله رسم صفحه عمود منصف a_0c_4 و یا به طریق محاسبه ثابت کنید SA با SC مساوی خواهد شد.

۵- منشور مایلی که يك قاعده آن، مستطیل $ABCD$ و s_{10} مرکز قاعده فوقانی آن باشد، در نظر گرفته ملخص آن را رسم و با فرض کدر بودن سطح آن، خطوط مرئی و مخفی را مشخص نمایید.

(متفرقه شهر یور ۱۳۴۴)

۳۲- محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید؛ واحد، سانتیمتر و مقیاس است.

۱- صفحه P به شیب يك مفروض است؛ مقیاس شیب آن را در طرف چپ کاغذ با ترقی رقوم از پایین به بالا طوری رسم کنید که محور اقصر کاغذ، افقیه رقوم يك آن باشد و در این صفحه نقطه c_4 را روی محور اطول

کاغذ اختیار نموده خط c_4a_1 را به شیب $3/4$ در این صفحه رسم کنید؛ نقطه a_1 در طرف چپ محور اطول کاغذ است.

۲- ملخص مثلث متساوی الاضلاع ABD واقع در صفحه P را طوری رسم کنید که يك رأسش a_1 و ملخص قطر دایره محیطی آن، a_1c_4 باشد؛ رقوم B از رقوم D کمتر است.

۳- صفحه Q را به موازات صفحه P طوری رسم کنید که محور اقصر کاغذ، افقیه رقوم ۵ آن و مقیاس شیبش طرف راست کاغذ باشد؛ همچنین از نقطه c_4 خطی به شیب يك بطوری که تصویرش با محور اقصر کاغذ موازی و ترقی رقومش از چپ به راست باشد، اختیار نموده و نقطه برخورد این خط را با صفحه Q تعیین و آن را F بنامید.

۴- ملخص منشوری که يك قاعده اش چهارضلعی $ABCD$ و يك یالش BF باشد، رسم نموده و با فرض کدر بودن سطح منشور، خطوط مرئی و مخفی آن را مشخص کنید.

۵- حجم این منشور را حساب کنید.

(متفرقه خرداد ۱۳۴۵)

مسائل ترمیمی امتحانات نهایی

۱- صفحه PaQ' به مختصات ذیل: α سمت چپ کاغذ، Pa زیر xy که با آن، زاویه 45° می‌سازد؛ $\alpha Q'$ بالای xy و با آن زاویه 30° می‌سازد. مطلوب است تصاویر مثلث ABC که روی صفحه مذکور باشد: AB روی افقیه به ارتفاع ۲ و AC روی جبهیه به بعد ۳ و BC با خط الارض متعامد است و $AB=7$ می‌باشد. مطلوب است تصاویر ارتفاعات مثلث ABC .

(خرداد ۱۳۳۷ متفرقه)

۲- ۱- نقطه aa' مفروض است؛ تصاویر قرینه‌های این نقطه را نسبت به صفحات تصویر و نیمساز فرجه‌ها تعیین کنید.

۲- از نقطه مفروض aa' خطی موازی نیمرخ $cde'd'$ رسم کنید.

۳- فصل مشترك صفحه مواجه PQ' را با صفحه مواجهیه که به خط-

الارض می‌گذرد، تعیین کنید (نقطه aa' و خط الارض نمایش صفحه است).

۴- صفحه $P\alpha Q'$ و $P\alpha$ اثر افقی صفحه دیگر مفروض است و می‌دانیم این دو صفحه برهم عمودند؛ اثر قائم این صفحه را تعیین کنید.

(خرداد ۱۳۳۷ تهران)

۳- ۱- نیمرخ $aba'b'$ مفروض است؛ بر آن، صفحه مواجی بگذرانید و آثارش را تعیین کنید.

۲- صفحه $P\alpha Q'$ و نقطه aa' خارج آن مفروض است؛ از این نقطه صفحه‌ای به موازات $P\alpha Q'$ رسم کرده آثارش را تعیین کنید.

۳- فصل مشترک دو صفحه $P\alpha Q'$ و $P\alpha Q$ را که هر دو از نقطه α از خط الارض گذشته‌اند، تعیین کنید.

۴- بر خط مفروض $aba'b'$ صفحه‌ای بگذرانید که عمود بر صفحه منصف فرجه ناحیه اول باشد.

(تهران شهریور ۱۳۳۷)

۴- ۱- تصویر افقی خطی و تصویر قائم يك نقطه آن داده شده است؛ تصویر قائم خط را پیدا کنید در صورتی که با صفحه مفروض $P\alpha Q'$ موازی باشد.

۲- از نقطه aa' دو خط متقاطع dd' و DD' را به موازات صفحه نیمساز فرجه دوم رسم کنید؛ آثار این صفحه را بدست آورید و از نقطه مفروض bb' واقع در ربع دوم، خطی بر صفحه مذکور عمود کنید.

۳- صفحه‌ای از نقطه مفروض mm' و خط زمین می‌گذرد؛ محل برخورد آن را با خط مفروض dd' پیدا کنید.

۴- خط dd' ، بزرگترین شیب يك صفحه نسبت به صفحه افق تصویر و خط DD' ، بزرگترین شیب صفحه دیگر نسبت به صفحه قائم تصویر، مفروضند؛ فصل مشترک دو صفحه را پیدا کنید.

(خرداد ۱۳۳۸ تهران)

۵- ۱- بر دو نقطه aa' و bb' دو خط به موازات یکدیگر طوری مرور دهید که خط واصل بین آثار افقی آنها موازی امتداد مفروض d باشد.

۲- آثار صفحه‌ای را که بر نقطه مفروض و نیمرخ مفروض مرور کرده است، رسم کنید.

۳- از نقطه مفروض، خطی به موازات صفحه نیمساز ناحیه دوم طوری رسم کنید که منتصب مفروضی را قطع کند.

۴- از نقطه تقاطع خط Δ با صفحه مفروض P ، خطی در صفحه P چنان مرور دهید که بر خط Δ عمود باشد.

(متفرقه خرداد ۱۳۳۸)

۶- ۱- آثار صفحه‌ای را رسم کنید که از نقطه aa' بگذرد، با خط dd' موازی باشد و بر صفحه نیمرخ $P\alpha Q'$ عمود شود.

۲- aa' و bb' تصاویر دو رأس و c و d تصاویر افقی دو رأس دیگر از مستطیل $ABCD$ مفروضند؛ c' و d' را معین کنید.

۳- نیمرخ $aba'b'$ را در ربع دوم رسم کنید و بر آن، صفحه‌ای مرور دهید که زاویه بین آثارش در تصویر، مقدار معلوم α باشد.

۴- از نقطه aa' واقع در خارج صفحه $P\alpha Q'$ و $R\beta S'$ ، قطعه خط

افقی متکی به دو صفحه مذکور چنان رسم کنید که در این نقطه به نسبت $\frac{1}{3}$ تقسیم شود.

(شهریور ۱۳۳۸ تهران)

۷- ۱- از نقطه O واقع در يك صفحه منتصب، خطی در این صفحه طوری رسم کنید که با صفحه دیگر که به وسیله دو خط موازی نمایش داده شده است، موازی شود.

۲- از نقطه O خطی عمود بر خط مفروض dd' و موازی با صفحه منتصب Q مرور دهید.

۳- فصل مشترک صفحه نیمرخ مفروض را با صفحه‌ای مار بر خط الارض پیدا کنید.

۴- مطلوب است تعیین آثار صفحه‌ای مار بر خط الارض و موازی با نیمرخ مفروض.

(متفرقه شهریور ۱۳۳۸)

۸- ۱- خط AA' را چنان رسم کنید که دو تصویرش در يك نقطه xy را قطع کنند و سپس خط BB' را بقسمی اختیار کنید که B' بر A و B

بر A' منطبق باشد و آثار صفحه‌ای که از دو خط AA' و BB' تشکیل می‌شود، تعیین کنید .

۲- خط DD' را در صفحه نیمساز فرجه اول رسم کنید و از نقطه aa' واقع در صفحه نیمساز فرجه اول صفحه $P\alpha Q'$ را بر خط DD' عمود کنید و موقع عمود را معین کنید .

۳- صفحه مواجه PQ' را چنان رسم کنید که Q' به فاصله ۳ سانتیمتر از xy در بالای آن و P به فاصله یک سانتیمتر در زیر xy واقع شود و سپس صفحه مواجه RS' را بقسمی رسم کنید که S' بر P و R بر Q' منطبق باشد . فصل مشترک دو صفحه مواجه PQ' و RS' را معین کنید .

(خرداد ۱۳۳۹ تهران)

۹-۱- فصل مشترک خط نیمرخ $aba'b'$ را با صفحات نیمساز اول و دوم پیدا کنید .

۲- دو خط متناظر که یکی افقیه hh' و دیگری جبهیه FF' است ، مفروضند؛ عمود مشترک این دو خط را رسم کنید .

۳- صفحه غیر مشخص $P\alpha Q'$ و نقطه aa' روی خط الارض مفروضند؛ قرینه نقطه aa' را نسبت به صفحه $P\alpha Q'$ پیدا کنید .

۴- خطی چنان رسم کنید که با صفحه $P\alpha Q'$ موازی بوده و از نقطه aa' گذشته و خط الارض را قطع کند .

(متفرقه خرداد ۱۳۳۹)

۱۰-۱- صفحه $P\alpha Q'$ و خط DD' بزرگترین شیب صفحه دیگری نسبت به صفحه افق، مفروضند؛ فصل مشترک دو صفحه را پیدا کنید .

۲- متوازی الاضلاع $abcd$ تصویر افقی لوزی $ABCD$ مفروض است؛ a' و c' تصاویر قائم دو رأس A و C نیز معین است؛ b' و d' تصاویر قائم B و D را بدست آورید .

۳- دو نیمرخ $aba'b'$ و $cde'd'$ را با معلومات زیر رسم کنید؛ فاصله

رابطها ۳ و aa' به بعد ۳ و ارتفاع ۱ و bb' به بعد ۲ و ارتفاع ۳ و cc' به بعد ۴ و ارتفاع ۱ و dd' به بعد ۲ و ارتفاع ۲؛ سپس خطی رسم کنید که دو نیمرخ را قطع کند و با xy موازی باشد .

(شهریور ۱۳۳۹ تهران)

۱۱-۱- صفحه $P\alpha Q'$ مفروض است؛ فصل مشترک آن را با صفحات نیمساز اول و دوم پیدا کنید .

۲- صفحه $P\alpha Q'$ مفروض است؛ یک صفحه دیگر به موازات آن، طوری مرور دهید که فاصله دو صفحه موازی، برابر واحد باشد و از دو جواب حاصل، فقط یکی را اختیار کنید .

۳- روی خط غیر مشخص dd' نقطه ای پیدا کنید که از دو نقطه aa' و bb' واقع بر خط نیمرخ مفروض، به یک فاصله باشد .

۴- از نقطه مفروض aa' خطی رسم کنید بقسمی که با خط مفروض dd' متعامد بوده و با صفحه منتصب مفروض $P\alpha Q'$ موازی باشد .

(متفرقه شهریور ۱۳۳۹)

۱۲-۱- در صفحه $P\alpha Q'$ نقطه aa' را اختیار کنید و از این نقطه خطی در صفحه رسم کنید که با صفحه نیمساز دوم موازی باشد .

۲- فصل مشترک خط dd' را که در نیمساز دوم واقع است، با صفحه $P\alpha Q'$ که آثارش در یک استقامتند، بدست آورید .

۳- عمود مشترک یک خط قائم و یک خط جبهی را که باهم متناظرند، رسم کنید .

۴- از نقطه oo' خطی بر نیمرخ $aba'b'$ عمود کنید .

(تهران خرداد ۱۳۴۰)

۱۳-۱- روی افقیه مفروض و به ارتفاع ۴ نقطه mm' را طوری پیدا کنید که فاصله M از خط الارض برابر ۵ باشد .

۲- قرینه نقطه مفروض aa' را نسبت به خط مفروض dd' پیدا کنید.
۳- فاصله حقیقی نقطه غیر مشخص aa' را از صفحه نیمساز ناحیه اول پیدا کنید.

۴- آثار افقی و قائم صفحه $P\alpha Q'$ روی ملخص در امتداد همدیگر بوده و نقطه aa' نیز که دو تصویرش برهم منطبق است، بر روی این اثر مشترک قرار دارد؛ از نقطه aa' خطی رسم کنید که خط الارض را قطع کرده و باصفحه $P\alpha Q'$ موازی باشد.

(متفرقه خرداد ۱۳۴۰)

۱۴-۱- خط مواجی رسم کنید که خط غیر مشخص dd' و خط $\Delta\Delta'$ را که در صفحه نیمساز دوم واقع است، قطع کند.
۲- فصل مشترک صفحه مواجه PQ' را با خط dd' که در نیمساز اول واقع است، معین کنید.

۳- بر نیمرخ $aba'b'$ صفحه‌ای بگذرانید که بر صفحه $P\alpha Q'$ که آثارش بر يك استقامتند، عمود باشد.
۴- صفحه‌ای از xy و نقطه aa' می‌گذرد؛ قرینه bb' را نسبت به این صفحه پیدا کنید.

(تهران شهریور ۱۳۴۰)

۱۵-۱- نقطه aa' را به ارتفاع ۳ و بعد ۶ اختیار کرده از این نقطه خطی به موازات صفحه نیمساز اول رسم کنید که باصفحه افق تصویر، زاویه ۳۰ درجه تشکیل دهد.

۲- از نقطه مفروض aa' واقع در خارج صفحه مفروض $P\alpha Q'$ ، افقیه‌ای چنان رسم کنید که صفحه را در نقطه bb' قطع کند و طول $l = AB$ معلوم باشد.

۳- فصل مشترک خط نیمرخ مفروضی را با صفحه مواجه مفروض پیدا کنید.

۴- آثار افقی و قائم دو صفحه دوبرو همدیگر را در حدود کاغذ تلاقی نمی‌کنند؛ فصل مشترک این دو صفحه را پیدا کنید.

(متفرقه شهریور ۱۳۴۰)

۱۶-۱- بر نقطه مفروض aa' خطی چنان مرور دهید که خط مفروض dd' را تلاقی کرده و بر خط مفروض دیگر II' عمود باشد.
۲- فصل مشترک خط نیمرخ مفروض $aba'b'$ را با صفحه نیمساز اول پیدا کنید.

۳- تصاویر قائم d' و Δ' دو خط متناظر dd' و $\Delta\Delta'$ و تصاویر افقی و قائم عمود مشترک آنها معلوم است؛ تصاویر افقی آنها d و Δ را پیدا کنید.
۴- مقدار حقیقی فاصله دو صفحه موازی مفروض $P\alpha Q'$ و $R\beta S'$ را پیدا کنید.

(متفرقه - آبان ۱۳۴۰)

۱۷-۱- از نقطه مفروض aa' خط نیمرخ چنان مرور دهید که با صفحه مفروض $P\alpha Q'$ موازی باشد.

۲- خط نیمرخ $aba'b'$ مفروض است؛ از نقطه aa' آن، صفحه‌ای عمود بر این خط نیمرخ مرور داده و آثار آن را رسم کنید.

۳- فصل مشترک صفحه مواجه PQ' را باصفحه نیمساز دوم پیدا کنید.
۴- آثار افقی و قائم صفحه‌ای در امتداد همدیگر قرار گرفته؛ فاصله حقیقی يك نقطه مفروض oo' واقع بر خط الارض تا این صفحه را پیدا کنید.

(متفرقه - اردیبهشت ۱۳۴۱)

۱۸-۱- روی خط مفروض و غیر مشخص dd' نقطه‌ای پیدا کنید که ارتفاع آن، سه برابر بعد و یا بعد آن، سه برابر ارتفاع باشد؛ ملخص هر دو حالت را رسم کنید.

۲- صفحه‌ای تشکیل شده از خط نیمرخ $aba'b'$ و نقطه خارجی mm' ؛ آثار افقی و قائم این صفحه را رسم کنید.

۳- از نقطه مفروض aa' خطی رسم کنید که خط مفروض dd' را قطع کرده و با صفحه نیمساز اول موازی باشد.

۴- صفحه $P\alpha Q'$ که در آن، عمود بر $\alpha Q'$ و خط الارض نیمساز

زاویه مابین آنها می باشد، مفروض است؛ نقطه aa' را روی خط الارض به فاصله 1 از نقطه α داخل زاویه مقعر $P\alpha Q'$ بگیرید؛ فاصله حقیقی نقطه را تا صفحه ترسیم و مقدار آن را بر حسب 1 حساب کنید .

(خرداد ۱۳۴۱ دبیرستانهای کشور)

۱۹ - ۱ - عمود مشترك نیمرخ مفروض $aba'b'$ و خط الارض را تعیین کنید .

۲ - صفحه مواجه PQ' مفروض است؛ ارتفاع Q' برابر ۳ و بعد P برابر ۲ است؛ نقطه aa' روی این صفحه طوری انتخاب شده که a' بر روی Q' است؛ از این نقطه روی صفحه مواجه خطی چنان رسم کنید که زاویه آن با صفحه افق تصویر، ۳۰ درجه باشد .

۳ - از يك صفحه، خط غیر مشخص dd' و تصویر قائم D' خط بزرگترین شیب آن نسبت به صفحه افق تصویر، معلوم است؛ آثار این صفحه را رسم کنید .

۴ - خط dd' که با خط الارض متقاطع می باشد، مفروض است؛ بر این خط، صفحه ای چنان مرور دهید که در فضا خط D نیمساز زاویه حادث بین دو اثر صفحه باشد و آثار صفحه مطلوب را رسم کنید .

(دبیرستانهای کشور - شهریور ۱۳۴۱)

۲۰ - ۱ - از نقطه مفروض aa' خط نیمرخ چنان رسم کنید که بر خط مفروض dd' عمود باشد .

۲ - برافقیه مفروض hh' به ارتفاع ۳، صفحه ای مرور دهید که زاویه آن با صفحه افق تصویر، ۴۵ درجه باشد .

۳ - از نقطه aa' واقع بر روی صفحه $P\alpha Q'$ خطی به موازات صفحه نیمساز اول رسم کنید .

۴ - αP ، اثر افقی صفحه ای و طول معلوم 1، فاصله حقیقی يك نقطه

مفروض oo' واقع بر خط الارض تا این صفحه داده شده؛ اثر قائم صفحه را پیدا کنید؛ بحث .

(متفرقه - آبان ۱۳۴۱)

۲۱ - ۱ - نیمرخ $aba'b'$ مفروض است؛ از نقطه aa' نیمرخ دیگری رسم کنید که با آن، زاویه حقیقی ۶۰ درجه تشکیل دهد .

۲ - خط غیر مشخص dd' داده شده؛ قرینه آن را نسبت به صفحه نیمساز اول پیدا کنید .

۳ - صفحه $P\alpha Q'$ داده شده؛ بر خط الارض، صفحه ای بگذرانید که بر آن صفحه عمود باشد؛ سپس فصل مشترك دو صفحه را پیدا کنید .

۴ - صفحه $P\alpha Q'$ مفروض است؛ صفحه ای چنان تعیین کنید که جميع نقاط آن از دو اثر صفحه نامبرده به يك فاصله باشد؛ آثار این صفحه را نیز رسم کنید .

(متفرقه - اردیبهشت ۱۳۴۲)

۲۲ - ۱ - از يك لوزی ABCD به قطر AC تصاویر افقی a و b و c و d چهار رأس و تصاویر قائم a' و c' دو رأس آن داده شده؛ b' و d' را پیدا کنید .

۲ - از نقطه مفروض aa' صفحه مواجه طوری مرور دهید که زاویه آن با صفحه افق تصویر، دو برابر زاویه آن با صفحه قائم تصویر باشد .

۳ - قرینه خط مفروض $\Delta\Delta'$ را نسبت به صفحه نیمرخ مفروض، پیدا کنید .

۴ - دو خط متقاطع dd' و $\Delta\Delta'$ داده شده؛ ملخص نیمساز یکی از زوایای مابین این دو خط را رسم کنید .

(خرداد ۱۳۴۲ تهران)

۲۳ - ۱ - نیمرخ $aba'b'$ مفروض است؛ از نقطه cc' نیمرخ دیگری رسم کنید که بر نیمرخ اول عمود باشد.

۲ - قرینه خط dd' را نسبت به صفحه نیمساز دوم پیدا کنید .

۳ - از نقطه مفروض aa' صفحه مواجی رسم کنید که با صفحات افق و قائم تصویر، زوایای متساوی تشکیل داده و آثار آن را نیز رسم کنید .

۴ - نقاط aa' و bb' و c تصویر افقی نقطه ثالثی داده شده اند ؛ تصویر قائم نقطه را پیدا کنید در صورتی که می دانیم \widehat{BAC} مساوی 90° است .

(خرداد ۱۳۴۲ شهرستانها)

۲۴ - ۱ - فصل مشترك صفحه $P\alpha Q'$ و $R\beta S'$ را در حالت کلی

پیدا کنید .

۲ - خط dd' بزرگترین شیب يك صفحه نسبت به صفحه افق تصویر است ؛ آثار این صفحه را رسم کنید .

۳ - روی خط الارض، نقطه ای پیدا کنید که فاصله حقیقی آن از افقیه مفروض ، برابر طول معلوم l باشد و در مسئله بحث کنید .

۴ - قرینه صفحه مفروض $P\alpha Q'$ را نسبت به صفحه نیمساز اول پیدا و آثار آن را رسم کنید .

(شهریور ۱۳۴۲ تهران)

۲۵ - ۱ - فصل مشترك خط مفروض dd' را با صفحه مفروض $P\alpha Q'$

در حالت کلی پیدا کنید .

۲ - از نقطه مفروض aa' به ارتفاع ۳ و بعد ۴ خطی رسم کنید که تصویر قائم آن با خط الارض زاویه 45° درجه تشکیل داده و زاویه حقیقی این خط با صفحه افق تصویر، 30° درجه باشد؛ بحث .

۳ - در صفحه نیمرخ مفروض ، پاره خط $aca'c'$ داده شده ؛ ملخص مربعی را که این پاره خط، یکی از اقطار آن است و در صفحه نیمرخ قرار دارد، رسم کنید .

۴ - قرینه صفحه مفروض $P\alpha Q'$ را نسبت به صفحه نیمساز دوم پیدا و آثار آن را تعیین کنید .

(متفرقه - شهریور ۱۳۴۲)

۲۶ - ۱ - روی خط مستقیم مفروض dd' نقطه ای پیدا کنید که مجموع بعد و ارتفاع آن، ۲ باشد .

۲ - نیمرخ $aba'b'$ مفروض است ؛ از نقطه cc' نیمرخ دیگری موازی آن رسم کرده و آثار صفحه حاصل را ترسیم کنید .

۳ - تصویر افقی لوزی و تصویر قائم يك قطر آن داده شده ؛ ملخص لوزی را تکمیل کنید .

۴ - از نقطه مفروض aa' به ارتفاع ۲ و بعد ۳ خطی چنان رسم شده که زاویه آن با صفحه افق تصویر، 45° درجه و زاویه آن با صفحه قائم تصویر، 30° درجه است ؛ اگر نقطه bb' اثر افقی این خط باشد ، قبلا طولهای ab و Ab و $a'b'$ را تعیین و سپس طرز رسم هندسی این خط را بیان کنید .

(متفرقه اردیبهشت ۱۳۴۳)

۲۷ - ۱ - ارتفاع نقطه ای از بعد آن، يك واحد بیشتر است ؛ فاصله حقیقی آن تا خط زمین پنج است ؛ ملخص نقطه را رسم کنید .

۲ - بر خط مفروض dd' صفحه ای مرور دهید که آثارش بر هم منطبق باشد. وضع هندسی این صفحه در فضا چگونه است ؟

۳ - از نقطه مفروض aa' خط نیمرخ چنان رسم کنید که صفحه مواجه مفروض را در نقطه $b'b'$ قطع کند و طول $AB=l$ باشد؛ بحث کنید .

۴ - روی صفحه مفروض $P\alpha Q'$ تصاویر افقی و قائم مکان هندسی نقاطی را رسم کنید که ارتفاع آنها دو برابر بعدشان باشد .

(دبیرستانها خرداد ۱۳۴۳)

۲۸ - ۱ - افقیه ای رسم کنید که دو خط قائم و يك خط منتصب داده شده را قطع کند .

۲ - روی خط غیر مشخص و داده شده dd' نقطه ای بیابید که مجموع بعد و ارتفاعش مقدار معلوم l باشد .

۳ - خط غیر مشخصی رسم کنید که موازی صفحه منصف الفرجه اول باشد؛ برخورد این خط را با منصف الفرجه ناحیه دوم بیابید .

۴ - فصل مشترك يك صفحه نیمرخ و يك صفحه مواجه داده شده را یافته تسطیح کنید .

۵ - عمود مشترك دو خط مفروض را که یکی قائم و دیگری غیر مشخص است، بیابید .

۶ - در صفحه غیر مشخص و مفروض $P\alpha Q'$ ، از نقطه دلخواه aa' خطی چنان رسم کنید که موازی صفحه منصف الفرجه ناحیه دوم بوده و بر صفحه $P\alpha Q'$ منطبق باشد .

(دبیرستانها شهریور ۱۳۴۳)

۲۹ - ۱ - نقطه‌ای به ارتفاع ۵ و بعد ۳ رسم کرده قرینه این نقطه را نسبت به صفحه منصف الفرجه دوم بیابید .

۲ - فصل مشترك دو صفحه مواجه و مفروض را فقط به يك طریق معین کنید .

۳ - روی خط غیر مشخص و مفروض $\delta\delta'$ نقطه‌ای بیابید که بعدش به اندازه ۱ بیش از ارتفاعش باشد .

۴ - از نقطه مفروض aa' خطی عمود بر صفحه مفروض و غیر مشخص $P\alpha Q'$ رسم کرده پای عمود را بیابید .

۵ - از صفحه‌ای يك اقیه و يك جبهه مفروض است؛ آثار این صفحه را بیابید .

۶ - نقطه بر خورد خط مفروض و غیر مشخص $\delta\delta'$ را با صفحه‌ای که بر خط زمین گذشته و يك نقطه aa' از آن مفروض است، معین کنید .

(متفرقه آبان ماه ۱۳۴۳)

۳۵ - ۱ - از نقطه مفروض aa' خطی رسم کنید که خط مفروض DD' را تلاقی نموده و با صفحه نیمساز فرجه دوم موازی باشد .

۲ - عمود مشترك خط نیمرخ $aba'b'$ را با خط مواجه $\Delta\Delta'$ رسم کنید .

۳ - صفحه $P\alpha Q'$ آثارش بر يك استقامت است؛ از نقطه مفروض bb' صفحه‌ای به موازات آن رسم کنید .

۴ - فصل مشترك خط مواجه DD' را با صفحه غیر مشخص $P\alpha Q'$ پیدا کنید .

۵ - نقطه bb' در صفحه افق تصویر و خط dd' واقع در صفحه نیمساز فرجه اول و سوم مفروضند؛ آثار صفحه‌ای را که بر این نقطه و این خط می‌گذرد، رسم کنید .

(متفرقه - شهریور ۱۳۴۴)

۳۱ - ۱ - مجموع بعد و ارتفاع نقطه A برابر ۴ و فاصله حقیقی آن تا خط الارض، برابر ۳ است؛ ملخص نقطه را رسم کنید. از دوجواب، آن که ارتفاع نقطه کمتر است، اختیار کنید .

۲ - نقطه aa' را به بعد ۵ و ارتفاع ۲ اختیار نموده از این نقطه خطی به موازات صفحه نیمساز فرجه اول و سوم چنان رسم کنید که با صفحه افق تصویر، زاویه ۳۵ درجه بسازد (رسم یکی از دو جواب کافی است) .

۳ - صفحه مواجه PQ' مفروض است؛ بعد P مساوی ۴ و ارتفاع Q' مساوی ۳ است؛ تصویر افقی نقطه mm' واقع در ناحیه اول به بعد ۲ نیز معلوم است؛ فاصله حقیقی این نقطه تا صفحه برابر ۲ می‌باشد؛ تصویر قائم آن را تعیین کنید .

۴ - نقطه bb' را به بعد ۳ و ارتفاع ۲ و نقطه cc' را به بعد ۶ و ارتفاع ۳ اختیار کنید بطوری که فاصله رابطهای این دو نقطه از هم برابر ۳ و bb' در طرف چپ cc' باشد؛ مطلوب است رسم ملخص مثلث متساوی - الساقین ABC ($AB=AC$) بطوری که قاعده اش $ccb'e'$ و رأس A روی خط الارض باشد .

۵ - خط DD' را به موازات صفحه نیمساز فرجه دوم و چهارم و خط افقی HH' را متقاطع با آن اختیار نموده آثار صفحه‌ای را که از این دو خط می‌گذرد، رسم نموده و فصل مشترك این صفحه را با صفحه نیمساز فرجه دوم و چهارم تعیین کنید .

(متفرقه - خرداد ۱۳۴۵)